

**PENERAPAN *SCAFFOLDING* YANG BERORIENTASI PADA HIERARKI
BELAJAR GAGNE SETTING PENGAJARAN LANGSUNG DALAM
PERKULIAHAN ANALISIS REAL I**

*IMPLEMENTATION OF GAGNE'S LEARNING HIERARCHY –ORIENTED -
SCAFFOLDING WITH DIRECT INSTRUCTION SETTING IN THE TEACHING OF
REAL ANALYSIS I*

IKHBARIATY KAUTSAR QADRY



**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR
2013**

**PENERAPAN *SCAFFOLDING* YANG BERORIENTASI PADA HIERARKI
BELAJAR GAGNE SETTING PENGAJARAN LANGSUNG DALAM
PERKULIAHAN ANALISIS REAL I**

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Derajat

Magister

Program Studi

Pendidikan MIPA

Konsentrasi Pendidikan Matematika

Disusun dan Diajukan oleh

IKHBARIATY KAUTSAR QADRY

Kepada

**PROGRAM PASCASARJANA
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR
2013**

TESIS

PENERAPAN *SCAFFOLDING* YANG BERORIENTASI PADA HIERARKI BELAJAR GAGNE SETTING PENGAJARAN LANGSUNG DALAM PERKULIAHAN ANALISIS REAL I

Yang disusun dan diajukan oleh
Ikhbariaty Kautsar Qadry
Nomor Pokok : 10B07051

Telah dipertahankan di depan Panitia Ujian Tesis
pada tanggal 21 Februari 2013

Menyetujui
Komisi Penasihat,

Dr. Muhammad Darwis M, M.Pd.
Ketua

Dr. Ilham Minggi, M.Si.
Anggota

Mengetahui:

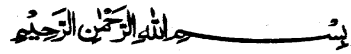
Ketua
Program Studi
Pendidikan Matematika,

Direktur
Program Pascasarjana
Universitas Negeri Makassar,

Prof. Dr. Nurdin Arsyad, M.Pd.
NIP. 19670424 199203 1 002

Prof. Dr. Jasruddin, M.Si.
NIP. 19641222 199103 1 002

PRAKATA



Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadiran Allah SWT serta shalawat dan taslim atas junjungan Nabi Muhammad SAW karena limpahan rahmat dan hidayah-Nyalah sehingga penelitian dan penyusunan tesis dengan judul “Penerapan Hierarki Belajar Gagne Dan Pemberian *Scaffolding* Setting Pengajaran Langsung Dalam Perkuliahan Analisis Real I” dapat diselesaikan dengan baik.

Selama proses penelitian dan penyusunan tesis ini, tidak sedikit kendala yang dihadapi. Namun demikian, berkat keseriusan pembimbing mengarahkan dan membimbing penulis sehingga tesis ini dapat diselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, penulis patut menyampaikan penghargaan dan ucapan terima kasih yang setinggi-tingginya kepada Dr. Muhammad Darwis M, M.Pd dan Dr. Ilham Minggu, M.Si selaku pembimbing. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada tim penguji, yaitu Prof Dr. H. Nurdin Arsyad, M.Pd dan Dr. Awi Dassa, M.Si yang banyak memberikan masukan yang sangat berarti dalam penyusunan laporan penelitian ini. Ucapan terima kasih tak lupa pula disampaikan kepada Direktur Program Pascasarjana Universitas Negeri Makassar, Asisten Direktur I, Asisten Direktur II, Ketua Program Studi Pendidikan Matematika serta seluruh dosen program studi Pendidikan Matematika yang telah memberikan kemudahan kepada penulis, baik pada saat mengikuti perkuliahan, maupun pada saat pelaksanaan penelitian dan

penyusunan laporan. Mudah-mudahan bantuan dan bimbingan yang diberikan mendapat pahala dari Allah Swt.

Teristimewa kepada suami tercinta Syahrullah Asyari, S.Pd., M.Pd yang telah memberikan masukan, ide, motivasi serta doanya, tidak lupa pula orangtua dan mertua yang tak putus-putusnya mendoakan penulis sehingga penulis dapat melewati segala kendala dalam menyelesaikan tesis ini . Penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga atas segala doa, kasih sayang tulus serta dukungan yang luar biasa untuk keberhasilan penulis. Kepada seluruh keluarga yang tak dapat disebutkan satu persatu yang senantiasa memberikan sumbangan moril dan materil.

Rekan-rekan mahasiswa PPs jurusan Pendidikan Matematika angkatan 2010 yang telah banyak berjasa memberikan semangat dan bantuan dalam penyelesaian tesis ini salam kompak selalu, serta semua pihak yang telah memberikan bantuannya selama ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga segala bimbingan, arahan, bantuan serta partisipasi yang telah diberikan kepada penulis selama penyusunan tesis ini, tercatat sebagai amal ibadah disisi Allah SWT. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tesis ini masih terdapat kekurangan, untuk itu kritikan dan saran sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tesis ini.

Makassar Februari 2013

Ikhbariaty Kautsar Qadry

PERNYATAAN KEORISINALAN TESIS

Saya, Ikhbariaty Kautsar Qadry

Nomor Pokok : 10B07051,

Menyatakan bahwa tesis yang berjudul Penerapan Hierarki Belajar Gagne Dan Pemberian *Scaffolding* Setting Pengajaran Langsung Dalam Perkuliahan Analisis Real I merupakan karya asli. Seluruh ide yang ada dalam tesis ini, kecuali yang saya nyatakan sebagai kutipan, merupakan ide yang saya susun sendiri. Selain itu, tidak ada bagian dari tesis ini yang telah saya gunakan sebelumnya untuk memperoleh gelar atau sertifikat akademik.

Jika pernyataan di atas terbukti sebaliknya, maka saya bersedia menerima sanksi yang ditetapkan oleh PPs Universitas Negeri Makassar.

Tanda tangan

Februari 2013

ABSTRAK

IKHBARIATY KAUTSAR QADRY. Penerapan *Scaffolding* yang Berorientasi pada Hierarki Belajar Gagne Setting Pengajaran Langsung dalam Perkuliahan Analisis Real I. (Dibimbing oleh Muhammad Darwis dan Ilham Minggu).

Jenis penelitian ini lebih dominan tergolong penelitian deskriptif kualitatif dan eksploratif. Subjek penelitian ini adalah 3 dari 51 mahasiswa Kelas V-C Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Makassar. Penentuan subjek penelitian didasarkan pada hasil tes diagnostik berdasarkan mata kuliah Kalkulus I, Aljabar Elementer, dan Logika Matematika. Penelitian ini bertujuan mendeskripsikan respon, aktivitas, hasil belajar, dan pemahaman mahasiswa terhadap materi Analisis Real I dalam perkuliahan yang menerapkan hierarki belajar dan pemberian *scaffolding* setting pengajaran langsung.

Untuk mengungkap tujuan penelitian tersebut, dilakukan wawancara berbasis hasil tes kepada subjek penelitian. Dalam hal ini, pertanyaan wawancara yang diberikan kepada subjek penelitian didasarkan pada hasil tes uraian. Data penelitian divalidasi dengan menggunakan triangulasi metode, yaitu menggunakan lebih dari satu teknik pengumpulan data untuk mendapatkan data yang sama. Dalam hal ini, digunakan tes uraian dan wawancara. Data penelitian dianalisis dengan (a) menelaah data subjek, (b) melakukan reduksi data, (c) mengklasifikasi dan mengidentifikasi data, (d) membandingkan data hasil tes uraian dan data hasil wawancara (triangulasi metode), (e) menafsirkan data, dan (f) menarik simpulan.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa: (1) sebanyak 45 orang (97.83%) dari 46 mahasiswa memberikan respon positif terhadap penerapan *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar, (2) penerapan *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar efektif terhadap aktivitas mahasiswa, (3) mean sebesar 34,32 dari skor ideal 100 menunjukkan bahwa hasil belajar mahasiswa dengan penerapan *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar berada dalam kualifikasi rendah; (4) pemahaman mahasiswa terhadap materi analisis real I menunjukkan bahwa: (1) Subjek S1 menunjukkan bahwa ada 23 dari 26 soal sesuai (konsisten). Mayoritas [12 dari 26] dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori pemahaman relasional, sehingga pemahaman Subjek S1 adalah pemahaman relasional; (2) Subjek S2 menunjukkan bahwa ada 21 dari 26 soal sesuai (konsisten). Mayoritas (12 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori tidak memahami soal, sehingga Subjek S2 tidak termasuk ke dalam salah satu dari ketiga kategori pemahaman; (3) Subjek S3 menunjukkan bahwa ada 24 dari 26 soal sesuai (konsisten). Mayoritas (11 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori pemahaman relasional, sehingga pemahaman Subjek S3 adalah pemahaman relasional.

ABSTRACT

IKHBARIATY KAUTSAR QADRY. Implementation of Gagne's Learning Hierarchy – Oriented – *Scaffolding* with Direct Instruction Setting in the Teaching of Real Analysis I. (Supervised by Muhammad Darwis and Ilham Minggi).

This research was more dominant to be included into exploratively and qualitatively descriptive research. The research subjects were 3 of 47 Grade V-D students of The Study Program of Mathematics Education, Makassar University of Muhammadiyah. Determination of the research subjects was based on the diagnostic test results of three courses, that is: Calculus I, Elementary Algebra, and Mathematical Logic. This research aimed at describing students' responses, activities, learning achievement, and understanding toward Real Analysis I in a teaching Implementation of Gagne's Learning Hierarchy – Oriented – *Scaffolding* with Direct Instruction Setting.

To reveal the research objectives, it was conducted test result-based-interview to the research subjects. In this regard, interview questions given to research subjects were based on essay test results. Research data were validated using triangulation method, that is to apply more than one data gathering technique to obtain the same or similar data. In this instance, it was utilized essay test and interview. Research data were then analyzed by: (a) reviewing subjects' data, (b) reducing data, (c) classifying and identifying data, (d) comparing data of essay test results and interview results (triangulation method), (e) interpreting data, and (f) drawing a conclusion.

The research results shows that: (1) there are 45 (97.83%) of 46 students responding positively toward the implementation of Gagne's learning hierarchy – oriented – *scaffolding*; (2) implementation of Gagne's learning hierarchy – oriented – *scaffolding* is effective towards students' activities; (3) the average of the students' scores as 34,32 of an ideal score 100 indicates that students' learning achievement through implementation of Gagne's learning hierarchy – oriented – *scaffolding* is in the low qualification; (4) students' understanding to Real Analysis I indicates that: (a) Subject S1 displays that there are 23 of 26 problems are in mutual accord (consistent). Majority [12 of 26] of corresponding solutions is in the category of relational understanding, such that the understanding of Subject S1 is relational understanding; (b) Subject S2 indicates that there are 21 of 26 problems are in mutual accord (consistent). Majority (12 of 26) of corresponding solutions is in the category of out of understanding problems, such that Subject S2 is not included in one of the three understanding categories; (c) Subject S3 shows that there are 24 of 26 problems are in mutual accord (consistent). Majority (11 of 26) of corresponding solutions is in the category of relational understanding, such that the understanding of Subject S3 is relational understanding.

DAFTAR ISI

	Halaman
PRAKATA	iv
PERNYATAAN KEORISINILAN TESIS	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xvi
DAFTAR LAMPIRAN	xvii
BAB I. PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	7
C. Tujuan Penelitian	8
D. Manfaat Penelitian	8
E. Batasan Istilah	9
BAB II. KAJIAN TEORI	12
A. <i>Scaffolding</i>	12
1. Pengertian <i>Scaffolding</i>	12
2. Metode Pengajaran dengan <i>Scaffolding</i>	18
3. Bentuk Bimbingan dalam <i>Scaffolding</i>	20

4. Kelemahan dan Kelebihan <i>Scaffolding</i>	23
5. Kesesuaian <i>Scaffolding</i> dengan Model Pengajaran Langsung	25
6. Prinsip Pengajaran Efektif	26
B. Hierarki Belajar Gagne	28
1. Pengertian Hierarki Belajar Gagne	28
2. Ilustrasi Hierarki Belajar Gagne pada Materi Analisis Real I	35
C. Aplikasi Penerapan <i>Scaffolding</i> yang Berorientasi pada Hierarki Belajar Gagne	37
D. Model Pengajaran Langsung	46
1. Pengertian	46
2. Sintaks Model Pengajaran Langsung	48
3. Kelebihan dan Kekurangan Model Pengajaran Langsung	50
E. Pemahaman Konsep dan Prinsip	53
1. Pemahaman	53
2. Konsep dan Prinsip	55
3. Pemahaman Konsep dan Prinsip	59
4. Mata Kuliah Analisis Real I	59
F. Kerangka Berpikir	61
1. Kedudukan <i>Scaffolding</i> dalam Perkuliahan Analisis Real I	61
2. Kedudukan Hierarki Belajar Gagne dalam Perkuliahan Analisis Real I	61
3. Penerapan <i>Scaffolding</i> dan Hierarki Belajar Gagne dalam Pengajaran Langsung	62

BAB III. METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian	63
B. Pemilihan Subjek Penelitian	64
C. Subjek Penelitian	67
D. Prosedur Penelitian	69
E. Instrumen Penelitian dan Perangkat Pembelajaran	71
1. Instrumen Penelitian	71
2. Perangkat Pembelajaran	79
F. Teknik Analisis Data	80
1. Teknik Analisis Kuantitatif	81
2. Teknik Analisis Kualitatif	86

BAB IV. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Hasil Penelitian	89
1. Hasil Analisis Deskriptif Kuantitatif	89
2. Hasil Analisis Deskriptif Kualitatif	101
B. Pembahasan	380
1. Hasil Analisis Deskriptif Kuantitatif dan Kualitatif	381
2. Konten yang Dirasakan Sulit oleh Mahasiswa dalam Tes Diagnostik	395
3. Keterkaitan Hasil Analisis Deskriptif Kuantitatif terhadap Hasil Analisis Deskriptif Kualitatif	396
4. Temuan Khusus	397
5. Keterbatasan Penelitian	398

BAB V. PENUTUP	399
A. Kesimpulan	399
B. Saran	401
DAFTAR PUSTAKA	403
LAMPIRAN - LAMPIRAN	407
RIWAYAT HIDUP	498

DAFTAR TABEL

Nomor		Halaman
2.1	Bentuk Scaffolding Berdasarkan Kendala-kendala yang dialami Mahasiswa dalam Pembuktian $\sqrt{6}$ Bukan Bilangan Rasional	40
2.2	Sintaks Model Pengajaran Langsung	49
2.2	Penguasaan Sistem Bilangan Real berdasarkan pada Materi Aljabar Elementer, Logika Matematika dan Kalkulus I	60
3.1	Kriteria Penentuan Subjek Penelitian Melalui Tes Diagnostik Berdasarkan Aljabar Elementer, Logika Matematika dan Kalkulus I Mahasiswa Semester V Kelas V-D Unismuh Makassar	66
3.2	Subjek Penelitian	69
3.3	Kriteria Batasan Waktu Ideal Aktivitas Mahasiswa	83
4.1	Deskripsi Hasil Respons Mahasiswa terhadap Pelaksanaan Perkuliahan	90
4.2	Aktivitas Mahasiswa Selama Kegiatan Perkuliahan	92
4.3	Statistik Deskriptif Untuk Skor Aljabar Elementer	95
4.4	Sebaran Frekuensi Skor Aljabar Elementer	96
4.5	Statistik Deskriptif Untuk Skor Logika Matematika	97
4.6	Sebaran Frekuensi Skor Logika Matematika	98
4.7	Statistik Deskriptif Untuk Skor Kalkulus I	98
4.8	Sebaran Frekuensi Skor Kalkulus I	99
4.9	Statistik Deskriptif Untuk Skor Hasil Belajar	100
4.10	Sebaran Frekuensi Skor Hasil Belajar	101

4.11	Triangulasi Data Pemahaman Subjek S1 dalam Menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real pada Tes Uraian dan Wawancara	187
4.12	Triangulasi Data Pemahaman Subjek S2 dalam Menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real pada Tes Uraian dan Wawancara	286
4.13	Triangulasi Data Pemahaman Subjek S3 dalam Menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real pada Tes Uraian dan Wawancara	378

DAFTAR GAMBAR

Nomor		Halaman
2.1	Rincian Analisis Tugas dengan Memperhatikan Kemampuan Prasyarat yang diperlukan untuk Mencapai Kemampuan Akhir	32
2.2	Ilustrasi Hierarki Belajar Gagne dalam Teorema Pythagoras	33
2.3	Ilustrasi Hierarki Belajar Gagne dalam Memfaktorkan Bentuk $Ax^2 + Bx + C = 0$	35
2.4	Ilustrasi Hierarki Belajar Gagne dalam Membuktikan $\sqrt{2}$ Bukan Bilangan Rasional	36
3.1	Analisis Data	88

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor	Halaman
1. Satuan Acara Perkuliahan (SAP)	408
2. Latihan Mandiri	427
3. Latihan Lanjutan	432
4. Tes Diagnostik	438
5. Format Lembar Observasi Aktivitas Mahasiswa	444
6. Format Angket Respon Mahasiswa	447
7. Kunci Jawaban Latihan Mandiri	449
8. Kunci Jawaban Latihan Mandiri	460
9. Tes Hasil Belajar (THB)	471
10. Kunci Jawaban Tes Hasil Belajar	472
11. Pedoman Wawancara	481
12. Hasil Pengamatan Aktivitas Mahasiswa	493
13. Surat Izin Penelitian	449
14. Riwayat Hidup	498

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Berbagai masalah unik yang timbul dalam pembelajaran matematika disebabkan oleh beberapa hal, antara lain simbolisme abstrak, struktur logika beserta aplikasinya. Dalam pembelajaran matematika, selain diperlukan keterampilan baik sederhana maupun kompleks, juga dibutuhkan kemampuan tentang fakta, konsep dan prinsip matematika. Sejalan dengan hal tersebut diperlukan pula analisis suatu masalah dan proses abstraksi untuk memahami suatu konsep. Demikian juga pembuktian teorema, penerapan suatu generalisasi, dan pembentukan struktur matematika. Untuk keperluan itu dibutuhkan tingkat berpikir kreatif yang tinggi (Johnson dan Rising, 1967).

Pencapaian kompetensi matematika oleh para siswa dan mahasiswa adalah sesuatu yang menjadi sasaran pembelajaran. Kompetensi-kompetensi tersebut cukup variatif, ada yang mudah atau sederhana dan ada pula yang sulit atau kompleks. Untuk mencapai kompetensi yang kompleks tentu saja tidak mudah, artinya dalam konteks pembelajaran atau perkuliahan, proses yang dilalui siswa dan mahasiswa perlu dipikirkan dan didesain secara matang. Dua di antara sekian banyak strategi dan pendekatan pengajaran yang dapat digunakan untuk mencapai kompetensi yang kompleks itu adalah strategi pengajaran dengan pemberian *scaffolding* yang

bersumber dari teori Vygotsky dan pendekatan hierarki belajar Gagne. *Scaffolding* mengisyaratkan pentingnya memilih jenis dan cara pemberian bantuan yang tepat untuk mencapai suatu kompetensi yang diinginkan sedangkan hierarki belajar Gagne merupakan acuan untuk metode pemberian bantuan yang diyakini mampu mengatasi kesulitan mahasiswa pada mata kuliah analisis real I. Ini disebabkan karena hierarki belajar Gagne menempatkan pengetahuan prasyarat sebagai unsur yang amat penting. Penerapan kedua hal tersebut secara terpadu dan proporsional dipandang dapat memecahkan masalah ketidaktuntasan belajar matematika bagi para siswa dan mahasiswa dalam proses pembelajaran di kelas.

Tidak dapat disangkal bahwa mata kuliah analisis real I termasuk salah satu mata kuliah yang secara umum dianggap sulit oleh mahasiswa. Bartle & Sherbert (2000) mengatakan bahwa analisis real sangat penting bagi mahasiswa yang ingin melakukan manipulasi rutin rumus-rumus untuk memecahkan soal-soal standar, sebab analisis real berpotensi untuk mengembangkan kemampuan berpikir deduktif, menganalisis situasi-situasi matematika, dan memperluas ide-ide terhadap suatu konteks baru. Untuk melakukan hal tersebut, mahasiswa membutuhkan pemahaman yang mantap terhadap semua konsep atau definisi. Hal yang sama juga dibutuhkan pemahaman yang matang tentang prinsip-prinsip matematika dalam mata kuliah tersebut. Prinsip ini meliputi aksioma, teorema, lemma dan corollary. Di sisi lain, diperlukan pula adanya keterampilan dalam mengerjakan soal-soal atau dalam memecahkan berbagai masalah matematika.

Pemahaman yang matang tentang konsep dan prinsip serta kelihaian dalam melakukan manipulasi matematika berupa keterampilan, tidak dapat dicapai dengan mudah, sebab ketiganya memerlukan pengetahuan prasyarat. Suatu pengetahuan yang mendukung pengetahuan yang lain atau suatu materi yang mendukung materi lain harus dikuasai terlebih dahulu. Konsep K_1 yang mendasari Konsep K_2 harus dikuasai atau dipahami lebih dahulu sebelum mempelajari Konsep K_2 . Demikian juga Teorema T_1 yang digunakan untuk membuktikan Teorema T_2 harus dipahami lebih dahulu sebelum membuktikan Teorema T_2 itu. Keterampilan P_1 yang mendasari Keterampilan P_2 juga harus dikuasai terlebih dahulu sebelum dilatihkan Keterampilan P_2 tersebut.

Uraian di atas menunjukkan bahwa matematika itu bersifat hierarkis. Sifat ini sangat kental dan melekat pada matematika. Suatu prasyarat yang dapat berupa pengetahuan, konsep, prinsip dan keterampilan tertentu harus dipahami terlebih dahulu sebelum mempelajari pengetahuan, konsep dan keterampilan lain yang memprasyaratkannya.

Analisis real adalah salah satu di antara materi matematika yang bersifat hierarkis yang sangat dibutuhkan oleh mahasiswa matematika karena manfaatnya. Analisis real sangat bermanfaat bagi mahasiswa yang ingin melakukan manipulasi rutin rumus-rumus untuk memecahkan soal-soal standar, karena analisis real mengembangkan kemampuan berpikir deduktif, menganalisis situasi-situasi matematika, dan memperluas ide-ide terhadap suatu konteks baru. Akhir-akhir ini, matematika memberikan kontribusi besar dalam banyak bidang, termasuk dalam

bidang ekonomi dan sains manajemen maupun sains fisika, teknik, dan sains komputer (Bartle & Sherbert, 2000).

Namun, pembelajaran analisis real I masih merupakan masalah bagi mahasiswa matematika. Dalam perkuliahan analisis real I, penulis pernah mengajukan suatu soal kepada mahasiswa semester V Jurusan Pendidikan Matematika Unismuh Makassar. Soal tersebut seperti ini “gambarlah pada bidang Cartesius yang memenuhi pertidaksamaan $|x| + |y - 1| \geq 3$, $x, y \in \mathbb{R}$. Kebanyakan mahasiswa tidak dapat menjawab soal tersebut, padahal sebelumnya kepada eka telah diberikan contoh yang mirip dengan soal tersebut. Contoh yang dimaksud adalah $|x + 1| - |y| \leq 2$, $x, y \in \mathbb{R}$). Mengapa mahasiswa pada umumnya tak dapat menjawab dengan benar soal tersebut? Kesulitan apa yang mereka alami dalam penyelesaian? Ternyata kesulitan yang mereka alami cukup beragam, beberapa di antara kesulitan itu adalah sebagai berikut.

1. Kesulitan memahami definisi nilai mutlak, yaitu tidak dapat menunjukkan bahwa $|x + 1| = x + 1$, untuk $x \geq -1$ dan $|x + 1| = -x - 1$, untuk $x < -1$. Kesulitan ini termasuk kesulitan dalam materi kalkulus
2. Kesulitan menggunakan kata perangkai “dan” dan kata perangkai “atau” (konjungsi dan disjungsi), yaitu tidak dapat menentukan syarat apabila tanda nilai mutlak ditiadakan, misalnya $|x + 1| - |y|$ dapat diubah menjadi $x + 1 + y$ dengan syarat $x \geq -1$ dan $y < 0$. Kesulitan ini termasuk kesulitan dalam materi logika matematika.

3. Kesulitan menggambar daerah penyelesaian. Kesulitan ini termasuk kesulitan dalam materi aljabar elementer.

Kasus tersebut menunjukkan bahwa mahasiswa harus mengetahui materi prasyarat yaitu definisi nilai mutlak yang ada pada mata kuliah kalkulus I, materi konjungsi dan disjungsi pada mata kuliah logika matematika dan menggambar daerah penyelesaian pada mata kuliah aljabar elementer sebelum masuk mata kuliah Analisis Real . Inilah alasan mengapa analisis real merupakan mata kuliah yang sulit karena mata kuliah ini memiliki materi yang hierarkis. Oleh karena itu pada penelitian ini, peneliti mencoba mengangkat pendekatan hierarki belajar Gagne sebagai salah satu solusi yang sebenarnya bukan hanya untuk mempelajari mata kuliah analisis real tapi untuk mempelajari seluruh mata kuliah lainnya dan matematika pada umumnya.

Pada kasus lain, dalam pembelajaran barisan bilangan real, mahasiswa pada umumnya tidak mampu memahami dengan baik definisi suatu barisan yang konvergen berikut ini. Suatu barisan $X = (x_n)$ dikatakan konvergen ke suatu bilangan real x jika untuk setiap bilangan positif ε , terdapat suatu bilangan asli K sedemikian sehingga jika $n \geq K$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$. Ketidakmampuan itu terutama disebabkan karena pengetahuan mereka kurang matang tentang logika matematika, khususnya tentang implikasi dan kalimat berkuantor kurang matang.

Fakta lain dalam pembelajaran tentang supremum suatu himpunan, mahasiswa mengalami kesulitan dalam menentukan supremum dan infimum dari himpunan $\left\{ \frac{n^2 + 2n - 5}{2n^2 - 3n + 4} \mid n \in N \right\}$. Salah satu penyebabnya adalah mereka kurang

menguasai aljabar tentang pembagian dua suku banyak. Mereka kurang mampu

mengubah bentuk $\frac{n^2+2n-5}{2n^2-3n+4}$ menjadi bentuk $\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}{2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}$ atau menjadi bentuk $\frac{1}{2} + \frac{4n-7}{2n^2-3n+4}$.

Uraian di atas memberikan indikasi bahwa salah satu penyebab ketidakmampuan mahasiswa memahami konsep-konsep dalam analisis real I adalah karena pengetahuan yang kurang memadai tentang materi prasyarat, yaitu sebagian dari materi kalkulus I, aljabar elementer dan logika matematika. Anggapan di atas diperkuat oleh Bartle (1967), menurutnya hal demikian terjadi disebabkan oleh tidak adanya pemahaman tentang semua materi prasyarat yang melandasi materi tersebut.

Telah disebutkan di atas sepiintas tentang pendekatan hierarki belajar Gagne di mana pendekatan ini pada prinsipnya menitikberatkan pentingnya penguasaan dan pemahaman yang mantap terhadap materi-materi prasyarat untuk suatu materi tertentu. Demikian juga kompetensi-kompetensi yang mendasari suatu kompetensi tertentu harus tercapai lebih dahulu sebelum mencapai kompetensi tersebut. Apabila hal ini diabaikan, maka pencapaian kompetensi yang diinginkan itu sulit untuk dapat diwujudkan. Dalam kondisi seperti yang dikemukakan di atas, penulis berpendapat bahwa salah satu upaya yang dapat ditempuh sebagai solusi dari masalah tersebut adalah dengan menerapkan perpaduan dari pendekatan dan strategi tersebut secara proporsional dalam perkuliahan.

Sering sekali dalam perkuliahan analisis real, ada mahasiswa yang memiliki kemampuan awal yang memadai dan telah menguasai logika matematika, namun setelah diberikan soal untuk membuktikan suatu teorema, mereka tidak langsung

dapat membuktikannya walaupun konsep-konsep prasyaratnya telah diketahui. Hal ini mungkin disebabkan karena mereka tidak terbiasa atau kurang terampil meramu konsep-konsep yang akan digunakan. Jika melihat kasus di atas penulis merasa penting pula untuk pemberian *scaffolding* selain menerapkan hierarki belajar Gagne. Dengan memberikan *scaffolding*, **mahasiswa mendapat bantuan dari dosen berupa keterampilan baru yang di luar kemampuannya sehingga tercapai kompetensi yang dikehendaki. Selain penerapan pendekatan hierarki belajar Gagne dan strategi pemberian *scaffolding*, peneliti juga merasa perlu menyelidiki sejauh mana kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan dan membuktikan soal-soal analisis real I dan mendeskripsikan jenis pemahaman yang mereka miliki. Alasan lainnya sehingga penulis perlu mengkaji pendekatan, strategi tersebut serta jenis pemahaman mahasiswa terhadap materi sistem bilangan real adalah karena masih minimnya penelitian yang relevan terutama di perguruan tinggi khususnya di Unismuh Makassar, bahkan dapat dikatakan belum ada sama sekali.**

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimanakah deskripsi respons mahasiswa terhadap perkuliahan analisis real I dengan menerapkan pemberian *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar Gagne setting pengajaran langsung?

2. Bagaimanakah deskripsi aktivitas mahasiswa terhadap perkuliahan analisis real I dengan menerapkan pemberian *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar Gagne setting pengajaran langsung?
3. Bagaimanakah deskripsi hasil belajar mahasiswa setelah mengikuti perkuliahan analisis real I dengan menerapkan pemberian *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar Gagne setting pengajaran langsung?
4. Bagaimanakah deskripsi jenis pemahaman mahasiswa terhadap materi sistem bilangan real dalam perkuliahan analisis real I dengan menerapkan pemberian *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar Gagne setting pengajaran langsung?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah penelitian di atas, penelitian ini bertujuan untuk menjawab rumusan masalah di atas yaitu untuk mendeskripsikan respons mahasiswa, aktivitas mahasiswa, hasil belajar mahasiswa, dan jenis pemahaman mahasiswa dalam perkuliahan analisis real I dengan menerapkan pemberian *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar Gagne setting pengajaran langsung

D. Manfaat Penelitian

Diharapkan semoga penelitian ini bermanfaat dalam memberikan informasi kepada berbagai pihak yang berhubungan dengan dunia pendidikan khususnya

peningkatan mutu pembelajaran pada mata kuliah yang banyak melibatkan konsep-konsep abstrak di kelas. Manfaat yang diharapkan antara lain:

1. Membantu langsung mahasiswa dalam memahami konsep dan prinsip pada mata kuliah analisis real I.
2. Dengan adanya perlakuan yang dilakukan dalam penelitian ini, dapat meningkatkan pemahaman konsep dan prinsip pada mata kuliah analisis real I dan mata kuliah yang lain.
3. Sebagai alternatif pengajaran yang dapat dilakukan oleh dosen-dosen matematika untuk memberikan solusi dalam menanamkan pemahaman konsep dan prinsip pada mata kuliah analisis real dan mata kuliah lainnya.
4. Bagi Jurusan: penelitian ini diharapkan mampu memberikan informasi dan masukan untuk meningkatkan kualitas pembelajaran, kualitas dosen dan kualitas jurusan.

E. Batasan Istilah

Batasan istilah penting diberikan agar tidak terjadi kesalahan penafsiran dalam memahami judul dan masalah yang diajukan dalam penelitian ini. Berikut ini disajikan batasan dari istilah-istilah yang digunakan.

1. *Scaffolding* adalah pemberian bantuan yang dibutuhkan mahasiswa sesuai dengan tingkat kebutuhan mahasiswa untuk mengatasi kesulitan yang dialami, namun bantuan tersebut diberikan pada tahap-tahap awal pembelajaran,

dikurangi atau bahkan dihentikan ketika mahasiswa sudah mampu melanjutkan tugas yang diberikan dosen secara mandiri

2. Orientasi adalah peninjauan untuk menentukan sikap (arah, tempat, dsb) yang tepat dan benar atau pandangan yang mendasari pikiran, perhatian atau kecenderungan.
3. Hierarki belajar Gagne adalah pendekatan dalam pembelajaran matematika yang menekankan pada pentingnya penguasaan materi-materi/pengetahuan prasyarat, sebelum mempelajari suatu materi tertentu. Pada pembelajaran materi tertentu dalam analisis real I, hierarki belajar Gagne ini diawali dengan pendeteksian materi prasyarat yang sangat dibutuhkan (sangat mendukung materi tersebut) lalu disusul dengan pembenahan materi-materi prasyarat tadi.
4. *Scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar Gagne adalah menerapkan pemberian bantuan atau *scaffolding* setelah mahasiswa mengalami kesulitan-kesulitan pada proses belajar dengan memberikan solusi salah satunya dengan mengacu atau mengarah kepada penerapan hierarki belajar Gagne.
5. Sistem bilangan real adalah salah satu materi yang diajarkan pada mata kuliah Analisis Real I di Jurusan/Prodi Pendidikan Matematika.
6. Setting pengajaran langsung adalah model pembelajaran yang berpusat pada dosen di mana dosen yang banyak menjelaskan konsep atau keterampilan yang akan dilatihkan kepada mahasiswa secara selangkah demi selangkah di bawah bimbingan dan arahan dosen.

7. Respons mahasiswa adalah pendapat dan tanggapan mahasiswa secara tertulis terhadap penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*.
8. Aktivitas mahasiswa adalah seluruh kegiatan mahasiswa yang didasarkan pada langkah-langkah penerapan *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar Gagne setting pengajaran langsung. Aktivitas ini diamati dengan menggunakan Lembar Observasi Aktivitas Mahasiswa
9. Hasil Belajar adalah skor yang mencerminkan kemampuan kognitif mahasiswa pada materi Sistem Bilangan Real
10. Jenis Pemahaman pada penelitian ini adalah jenis pemahaman menurut Skemp yaitu: (1) pemahaman instrumental (*instrumental understanding*) adalah kemampuan menggunakan aturan yang diingat secara tepat terhadap penyelesaian atau solusi dari suatu masalah, tanpa mengetahui mengapa aturan tersebut berlaku; (2) pemahaman relasional (*relational understanding*) adalah kemampuan mendeduksi aturan-aturan atau prosedur-prosedur tertentu dari hubungan-hubungan matematis yang lebih umum; (3) pemahaman formal (logis) (*formal understanding*) adalah kemampuan menghubungkan simbolisme dan notasi matematika dengan ide-ide matematika yang relevan dan menggabungkan ide-ide matematika tersebut ke dalam rantai penalaran logis.

BAB II

KAJIAN TEORI

A. *Scaffolding*

1. Pengertian *Scaffolding*

Terdapat beberapa definisi *scaffolding*. Menurut Kamus Oxford (Hornby, 2010), *scaffolding* adalah (1) *a temporary structure on the outside of a building, made of wooden planks and metal poles, used while building, repairing or cleaning*, (2) *the materials used in such a structure* yang terjemahannya adalah (1) struktur sementara pada bagian luar suatu gedung yang terbuat dari papan kayu dan tiang besi yang digunakan pada saat membuat bangunan, memperbaiki atau membersihkan; dan (2) bahan-bahan atau materi yang digunakan dalam suatu struktur (*temporer*). Menurut istilah, *scaffolding* adalah sebuah metafora untuk menjelaskan suatu bentuk bantuan yang ditawarkan oleh guru atau teman sejawat untuk mendukung tercapainya tujuan pembelajaran (Wood, Bruner, dan Ross, 1976).

Pengertian *scaffolding* yang lain adalah memberikan kepada seorang anak sejumlah besar bantuan selama tahap-tahap awal pembelajaran, kemudian mengurangi bantuan tersebut dan memberikan kesempatan kepada anak tersebut mengambil alih tanggung jawab yang semakin besar segera setelah mampu mengerjakan sendiri. Bantuan yang diberikan guru dapat berupa petunjuk, peringatan,

dorongan, menguraikan masalah ke dalam bentuk lain yang memungkinkan siswa dapat mandiri dalam memecahkan permasalahan.

Dalam kaitannya dengan hal ini, Vygotsky mengemukakan tiga kategori pencapaian siswa, yaitu (1) siswa mencapai keberhasilan dengan baik, (2) siswa mencapai keberhasilan dengan bantuan, (3) siswa gagal meraih keberhasilan. Ini berarti bahwa *scaffolding* merupakan upaya guru untuk membimbing siswa mencapai suatu keberhasilan, sehingga dorongan guru sangat dibutuhkan agar pencapaian siswa ke jenjang yang lebih tinggi menjadi optimum (Vygotsky, 1978: 5). Di samping itu, menurut Klausmeier (dalam Priyatni, dkk. 2008: 207), *scaffolding* adalah salah satu pemikiran penting konstruktivis modern dengan ciri khas yang mencakup keaktifan dan keterlibatan siswa dalam upaya proses belajar dengan memanfaatkan pengetahuan awal dan gaya belajar masing-masing siswa. Guru bertindak sebagai fasilitator yang membantu siswa, apabila siswa mengalami kesulitan dalam upaya belajar.

Dari beberapa definisi di atas dapat dikatakan bahwa dalam proses *scaffolding*, guru memberikan bantuan terhadap permasalahan yang dihadapi siswa baik dalam mengerjakan tugas, maupun memahami konsep-konsep yang sulit bagi siswa. Bantuan ini diberikan hanya pada tahap-tahap awal pembelajaran dengan memberikan arahan. Akan tetapi, dalam penyelesaian tugas tersebut, siswa diberikan tanggung jawab untuk menyelesaikannya sendiri. *Scaffolding* merupakan jembatan yang digunakan untuk menghubungkan apa yang sudah diketahui oleh siswa dengan sesuatu yang baru, yang akan dikuasai atau diketahui oleh siswa.

Scaffolding yang juga dikenal sebagai belajar yang dimediasi (*mediated learning*) adalah teori yang dikemukakan oleh Vigotsky, khususnya yang berkaitan dengan ide *Zone of Proximal Development* (ZPD). Menurut Vigotsky, tingkat perkembangan kemampuan anak itu berada dalam dua level, yaitu level kemampuan aktual (yang dimiliki anak) dan level kemampuan potensial (yang dapat dikuasai oleh siswa). Zona antara level kemampuan aktual dan potensial itu disebut *Zone of Proximal Development* atau Zona Perkembangan Terdekat. Untuk mencapai level kemampuan potensial itu, siswa memerlukan tangga atau jembatan untuk mencapainya. Tangga atau jembatan menuju level kemampuan potensial tersebut merupakan bantuan dari seorang guru berupa arahan, dukungan, atau bantuan tahap demi tahap dalam belajar dan pemecahan masalah.

Penafsiran terkini dari ide Vigotsky tentang ZPD adalah siswa seharusnya diberikan tugas dengan kompleksitas bertingkat. Guru tidak boleh memberikan tugas yang terlalu mudah, karena akan menjadikan siswa malas dan tidak termotivasi belajar. Demikian juga, tugas yang terlalu sulit dapat membuat siswa frustrasi. Guru dapat memberikan tugas yang sulit, menantang, dan realistis kemudian memberikan bantuan atau dukungan berupa tahapan untuk menyelesaikan tugas tersebut. Dengan bantuan bertahap dari guru atau teman sejawat, tugas yang sulit dapat dikerjakan oleh siswa.

Ada beberapa jenis bantuan yang dapat diberikan oleh guru. Bantuan ini tergantung pada tingkat kesulitan yang dialami siswa. Misalnya pemberian *scaffolding* dalam bentuk: (1) alat, misalnya *cue card*, analogi, dan model atau

teknik, misalnya guru model (*teacher modeling*), dorongan (*prompting*), atau mengungkapkan proses-proses berpikir secara lisan ketika menyelesaikan suatu tugas (*thinking aloud*) , (2) sebagai isyarat, saran petunjuk, bagian solusi, dan model pengajaran langsung, memecah tugas kompleks menjadi bagian yang lebih sederhana, (3) menggunakan *think aloud* atau verbalisasi proses berpikir ketika mencontohkan penyelesaian tugas, (4) pembelajaran kooperatif yang mendorong kerja kelompok dan dialog diantara *peer*, (5) dukungan konkrit melalui pertanyaan, *coaching* dan *modeling* (Lipscomb, 2004).

Pada penelitian ini jenis bantuan yang diberikan dalam bentuk isyarat, saran petunjuk dan model pengajaran langsung, oleh karena itu model pembelajaran yang digunakan pada mata kuliah ini adalah model pengajaran langsung, karena dosen lebih banyak memberikan informasi, materi dengan memasukkan pendekatan hierarki belajar Gagne serta pemberian *scaffolding*.

Bantuan dan dukungan yang diberikan oleh guru tahap demi tahap kepada siswa tidak dapat dilakukan secara terus-menerus sampai siswa dapat menyelesaikan tugas yang kompleks baginya. Teknik *scaffolding* digunakan untuk mencapai kompetensi yang kompleks, menantang, sulit, dan realistis. Pemberian *scaffolding* dalam pembelajaran dilakukan terhadap siswa yang telah memiliki pengetahuan awal atau pengetahuan prasyarat. Sedangkan, bagi siswa yang tidak memiliki pengetahuan awal, sama sekali tidak dapat diberikan *scaffolding*, tetapi diberikan pembelajaran remedial.

Penggunaan *scaffolding* dalam pembelajaran menjadikan pengajar berpikir tentang tahapan atau tangga yang seharusnya digunakan agar peserta didik dengan mudah dapat mengerjakan tugas kompleks setahap demi setahap. Tahapan tugas tersebut merupakan rangkaian kegiatan yang *hierarkis*. Ini diperlukan untuk mencapai kompetensi optimal yang seharusnya dikuasai peserta didik. Hasil identifikasi Applebee dan Langer (Zhao & Orey, 1999) menunjukkan bahwa terdapat lima langkah dalam pembelajaran dengan menerapkan teknik *scaffolding*.

- a. Intensionalitas (*intentionality*). Pada langkah ini guru mengelompokkan tugas kompleks yang akan dikuasai peserta didik menjadi beberapa bagian yang spesifik dan jelas. Bagian-bagian tersebut merupakan satu kesatuan yang diperlukan untuk mencapai kompetensi secara utuh.
- b. Sesuai dengan ZPD (*appropriateness*). Pada langkah ini, guru memfokuskan pemberian bantuan pada aspek-aspek yang belum dapat dikuasai siswa secara maksimal.
- c. Terstruktur (*structure*). Pada langkah ini guru melakukan aktivitas modeling dan bertanya kepada siswa dan menyusun pekerjaan siswa sesuai dengan tugas yang dibagikan sehingga penyelesaian tugas tersebut dapat membawa ke urutan berpikir alami.
- d. Kolaborasi (*collaboration*). Pada langkah ini, guru memberikan respons terhadap tugas yang dikerjakan siswa dan memperluas berdasarkan usaha siswa tanpa menolak apa yang telah siswa kerjakan. Peran guru di sini bukan sebagai evaluator, tetapi sebagai kolaborator.

- e. Internalisasi (*internalization*). Pada langkah ini, *scaffolding* secara berangsur-angsur ditarik (*fading*) sesuai dengan pola internalisasi siswa dan guru mempermantap pengetahuan yang telah dimiliki siswa agar mereka benar-benar menguasainya dengan baik.

Enam unsur utama dalam proses pengajaran *scaffolding*, yaitu:

1. Menetapkan tujuan khusus (*sharing a specific goal*): berbagai hal yang perlu dipertimbangkan dalam penetapan tujuan melalui kemampuan guru berkomunikasi dengan siswa dan kecakapan “*intersubjectivity*” seperti perhatian, persepsi, perasaan dan konsep
2. Pendekatan tugas menyeluruh (*whole task approach*) artinya semua tugas berfokus pada semua tujuan yang akan dicapai melalui keseluruhan proses dengan konsekuensi bahwa tugas dipelajari secara total dan bukan sebagai bagian keterampilan yang terpisah-pisah. Ciri dari pelajaran yang dipelajari berkaitan dengan tugas secara total.
3. Bantuan diberikan tepat waktu (*immediate availability of help*); keberhasilan siswa biasa lebih sering terjadi jika pakar menyiapkan bantuan tepat waktu dan dengan cara efektif sehingga membantu siswa dalam menyelesaikan tugas.
4. Bimbingan terarah (*intention assisting*): bantuan diberikan pada apa yang sedang dihadapi siswa, sehingga membantu pada permasalahan yang sedang ia hadapi. Guru atau pakar harus mengetahui berbagai cara penyelesaian tugas tertentu. Jika ternyata bantuan yang diberikan berkontribusi kecil pada siswa maka bisa saja

beralih ke cara coaching atau latihan sebagai strategi untuk membantu kemajuan belajar siswa

5. Bantuan pada level optimal (*optimal level of help*): bimbingan sebaiknya hanya pada daerah dimana tugas tidak dapat diselesaikan sendiri oleh siswa
6. Menyiapkan model pakar (*conveying an expert model*): model pakar dapat disiapkan dalam sebuah contoh tugas secara eksplisit sebagaimana pakar menyelesaikan tugas. Teknik-teknik penyelesaian tugas diungkapkan secara jelas.

2. Metode pengajaran dengan *scaffolding*

Lange (Lipscomb et al. 2004) mengatakan bahwa ada lima metode berbeda dalam *scaffolding* pengajaran yaitu:

1. Memodelkan perilaku yang diharapkan
2. Menawarkan penjelasan
3. Mengajak siswa berpartisipasi
4. Memverifikasi dan mengklarifikasi pemahaman siswa
5. Mengajak siswa untuk memberikan alasan

Pemodelan adalah pengajaran perilaku yang menunjukkan bagaimana seseorang seharusnya merasakan, berpikir, atau bertindak dalam situasi tertentu. Ada tiga macam pemodelan yaitu:

1. *Think-aloud modeling* memberikan sesuatu yang dapat didengar untuk memikirkan proses sesuai dengan tugas. Misalnya guru memverbalisasikan proses berpikirnya untuk memecah kata yang tidak dikenal menjadi bagian kata yang dapat dibaca.
2. *Talk-aloud modeling* melibatkan verbalisasi proses berpikir atau strategi *problem-solving* sewaktu ia mendemostrasikan tugas. Misalnya guru akan menggambarkan secara verbal proses berpikirnya sewaktu ia mendemonstrasikan cara benar ia mengurangi bilangan dua digit di papan tulis.
3. *Performance modeling* tidak memerlukan pembelajaran verbal. Misalnya, pelatih basket dapat menunjukkan pada seseorang bagaimana menangkap bola tinggi.
4. Sebagaimana halnya dengan pemodelan, guru juga perlu menawarkan penjelasan. Penjelasan seharusnya membuka pemahaman siswa tentang apa yang sedang dipelajari, mengapa dan kapan sesuatu digunakan, dan bagaimana menggunakannya. Diawali dengan penjelasan detail dan komprehensif, dan sering diulangi. Setelah pemahaman siswa mulai berkembang maka penjelasan hanya berkisar pada kata kunci dan dorongan untuk membantu siswa mengingat informasi penting. Misalnya, sewaktu pengajaran Analisis Real I mahasiswa dilatih bagaimana mengidentifikasi bilangan rasional dan bilangan irrasional, dosen perlu membawa mahasiswa melalui pembelajaran definisi dan ciri-ciri bilangan rasional di awal perkuliahan. Dosen mungkin perlu mengulang atau merephrase seluruh penjelasan ini berulang kali selama latihan terbimbing. Setelah pengalaman mahasiswa berkembang, dosen mungkin hanya mendorong

mahasiswa dengan kata seperti: seperti apa, yang mana, mengapa demikian dan berikan contoh dan non contohnya..

5. Selanjutnya mengajak siswa untuk berpartisipasi, terutama di awal tahap *scaffolding*. Teknik ini mempertinggi keterlibatan dan kepemilikan mahasiswa terhadap proses belajar. Selain itu keterlibatan siswa dalam proses belajar mengajar akan memberi kesempatan pada guru untuk memverifikasi dan mengklarifikasi pemahaman siswa. Setelah siswa paham dengan materi baru, maka isyarat tersebut menjadi kunci bagi guru untuk mengevaluasi pemahaman siswa dan menyiapkan umpan balik positif dan korektif.
6. Hal yang perlu mendapat perhatian waktu implementasi pengajaran dengan *scaffolding*. Menurut Larkin (Lipscomb et al. 2004): mulai dengan memacu peningkatan percaya diri dengan memberikan tugas awal yang dapat dikerjakan siswa dengan sedikit atau tanpa bantuan. Siapkan bantuan yang membuat siswa dapat menyelesaikan tugas dengan cepat, dengan begitu motivasi siswa terpelihara hingga pada tugas berikutnya. Bantu siswa serasi dengan *peer* atau *fit in*. Hindarkan kejenuhan dengan tidak membebani tugas berlebihan. Perhatikan tanda-tanda bahwa siswa telah menguasai tugas, sehingga *scaffolding* dapat dihilangkan secara berangsur-angsur.

3. Bentuk Bimbingan dalam *Scaffolding*

Rosenshine & Meister (McLoughlin, 2004) mengatakan bahwa perubahan kognitif dapat terjadi melalui proses interaksi sosial, dimana ide diartikulasi, bertukar

ide (*shared*), merevisi ide, modifikasi dan mengadopsi ide sesuai dengan relevansi tugas dan konteks. Perkembangan pelajar berubah dengan menggunakan pendekatan tugas belajar berurutan, bimbingan oleh peer, orang yang lebih pakar, atau dengan tutor.

Hmleo & Day (McLoughlin, 2004) mengatakan, bimbingan bisa dalam bentuk dialog, tugas kolaboratif, pertanyaan dan demo keterampilan secara terstruktur efektif membantu perkembangan kognitif dan pengaturan belajar sendiri (*self regulated learning*).

Tharp & Gallimore (McLoughlin, 2004) mengatakan bahwa dalam *scaffolding* tradisional dukungan dalam pengajaran dalam bentuk *face to face teaching*. Tingkat dukungan belajar bisa bervariasi dalam bentuk, substansi, dan konteks. Dukungan diberikan sewaktu guru model menargetkan penampilan tugas, memberikan penjelasan verbal yang mengidentifikasi unsur-unsur tugas dan strategi. Dukungan terbatas terhadap beberapa aspek tugas untuk melengkapi apa yang telah dikuasai peserta didik.

Pandangan yang sama oleh Beed, Hawkins, dan Roller (McLoughlin, 2004) menggambarkan tahap dukungan yang terletak di antara dua ekstrim, yaitu:

1. *Assisted modelling*: guru menyiapkan beberapa pelatihan (*coaching*) dan model yang membantu penyelesaian tugas.

2. *Elemen identification*: guru mengidentifikasi unsur-unsur pendekatan atau strategi yang diinginkan untuk membantu siswa menyelesaikan tugas.
3. *Strategy naming*: guru mengartikulasi strategi yang sesuai dengan tugas dan siswa menggunakan untuk menyelesaikan tugas.

Roehler dan Cantlon (McLoughlin, 2004) memfokuskan pada jenis dan karakteristik *Scaffolding* dalam percakapan belajar dan berbagai tipe lainnya, yaitu:

1. *Offering explanation* pernyataan tegas diberikan oleh pakar untuk mengelaborasi pemahaman yang terjadi pada siswa.
2. *Inviting students' participation*: siswa diberi kesempatan untuk mengontrol proses pembentukan pengetahuan.
3. *Verification and clarification of student's understanding*: jika pemahaman siswa masuk akal, maka guru memverifikasi respon siswa, tetapi jika pemahaman siswa salah maka guru menawarkan klarifikasi.

Tipe lainnya yaitu: pemodelan perilaku yang diinginkan, termasuk:

1. *Making thinking visible*, seperti, seperti halnya dalam think aloud, menunjukkan apa yang sedang dipikirkan seseorang tentang proses pada saat itu.
2. *Generating question and comments as in talk aloud*, misalnya sewaktu guru menunjukkan bagaimana proses dengan berbicara sepanjang proses. Guru mencontohkan pertanyaan dan jawaban dan selanjutnya diambil alih oleh siswa.

3. *Inviting students to contribute actively*, siswa didorong memberi kontribusi isyarat guna penyelesaian suatu tugas dan mengartikulasi pemahaman terhadap tugas tersebut.

Penelitian ini direncanakan akan dilakukan sesuai dengan pendapat Roehler dan Cantlon (McLoughlin, 2004) mengenai jenis dan karakteristik *scaffolding*, dimana pada pembelajaran ini, dosen sebagai pakar membantu mahasiswa untuk membentuk pengetahuannya, kemudian dosen mengecek pemahaman mahasiswa sehingga pemahaman dan pengetahuan yang keliru dapat diklarifikasi oleh dosen.

4. Kelemahan dan Kelebihan *Scaffolding*

Seperti halnya teknik belajar lain yang telah dikenal, *scaffolding* juga memiliki kelemahan dan kelebihan. Memahami dan membandingkan kelemahan dan kelebihan *scaffolding* akan membantu profesional atau trainer pendidikan dalam asesmen mereka dan pemanfaatan strategi-strategi dan teknik-teknik dan memungkinkan untuk perencanaan komprehensif sebelum implementasi. Kelemahan-kelemahan itu betul-betul ada, tetapi dapat diatasi dengan perencanaan dan persiapan yang cermat.

Adapun kelemahan penerapan teori *scaffolding* adalah:

- *Scaffolding* memakan waktu yang sangat banyak.
- Kurangnya orang yang memungkinkan memberikan *Scaffolding*.

- Terdapat kemungkinan guru salah menentukan ZPD siswa. Padahal, keberhasilan *scaffolding* sangat bergantung pada pengidentifikasian area yang hanya berada di luar kemampuan siswa, tetapi tidak terlalu jauh di luar kemampuannya.
- Tidak cukup untuk memodelkan perilaku-perilaku, strategi-strategi atau aktivitas-aktivitas yang diinginkan guru, karena guru belum sepenuhnya memperhatikan kebutuhan, kegemaran, minat, dan kemampuan-kemampuan siswa secara pribadi.
- Manfaat *scaffolding* tidak nampak sepenuhnya, apabila instruktur tidak betul-betul terlatih.
- *Scaffolding* mensyaratkan guru untuk mengontrol pemberian bantuan yang semakin berkurang.
- Kurangnya contoh-contoh dan tips-tips pembelajaran dengan *scaffolding* yang terdapat dalam buku-buku yang seringkali menjadi pegangan guru.

Ketika menilai kelebihan *scaffolding*, guru perlu memperhatikan konteks di mana guru ingin mengimplementasikan teknik tersebut. Apalagi, guru terlebih dahulu harus mengenal para siswa, kemudian mengevaluasi kebutuhan-kebutuhan khusus mereka. Beberapa kelebihan teori *scaffolding* adalah:

- Adanya kemungkinan guru dapat mengidentifikasi bakat siswa lebih dini.
- Guru dapat memberikan instruksi individual
- Adanya jaminan yang lebih besar bahwa siswa dapat mencapai *skill*, pengetahuan, atau kemampuan yang diharapkan.
- Guru dapat memberikan instruksi yang berbeda-beda.

- Guru dapat menyampaikan materi secara efisien. Ini karena hasil kerja siswa distrukturkan, difokuskan, dan kemunduran yang tidak diharapkan dieliminasi sebelum memulai pembelajaran. Selain itu, waktu pengerjaan tugas dan efisiensi penyelesaian aktivitas ditingkatkan.
- Guru dapat menciptakan momentum yang tepat untuk mencapai tujuan pembelajaran melalui struktur yang diberikan oleh *scaffolding*. Ini karena siswa menghabiskan lebih sedikit waktu mencari, dan memerlukan lebih banyak waktu untuk belajar dan menemukan teknik yang menghasilkan belajar yang lebih cepat.
- Melibatkan siswa secara aktif.
- Memotivasi siswa untuk belajar.
- Meminimumkan level frustrasi siswa dalam belajar.

(<http://projects.coe.uga.edu/epltt/index.php?title=Scaffolding>)

5. Kesesuaian *Scaffolding* dengan Model Pengajaran Langsung

Sebagaimana dapat dilihat pada sintaks pembelajaran dalam model pengajaran langsung yang terdiri dari: (1) menginformasikan tujuan dan menyiapkan mahasiswa, (2) mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan, (3) menyiapkan latihan terbimbing, (4) mengecek pemahaman dan memberikan umpan balik, dan (5) menyiapkan latihan mandiri (Arends, 2007). Dari sintaks pembelajaran dalam MPL nampak bahwa kemandirian siswa terletak pada sintaks ke lima, walaupun porsi kemandiriannya relatif kecil, sedangkan peran guru lebih banyak pada aktivitas

memberikan bimbingan yang secara berangsur-angsur berkurang sebagaimana prinsip “*fading* atau pengurangan kadar bantuan secara berangsur-angsur” dalam *scaffolding*.

Pada model pengajaran langsung kemandirian mahasiswa tampak pada pengerjaan latihan dan tugas mandiri, namun demikian peran dosen sebagai pembimbing tetap ada. Jenis bimbingan yang diberikan oleh dosen adalah merupakan penerapan dari lima metode pengajaran *scaffolding* yang terdiri dari:

1. Memodelkan perilaku yang diharapkan
2. Memberikan penjelasan yang membuka pemahaman siswa tentang apa yang dikaji
3. Mengajak mahasiswa berpartisipasi terutama pada tahap awal
4. Memverifikasi dan mengklarifikasi pemahaman mahasiswa
5. Mengajak mahasiswa untuk memberikan alasan terhadap penjelasan yang dikemukakan oleh mereka.

6. Prinsip Pengajaran Efektif

Manfaat atau kelebihan *scaffolding* mendukung sepuluh prinsip pengajaran efektif yang diungkapkan oleh Ellis, Worthington dan Larkin’s dalam *Executive Summary of the Research Synthesis on Effective Teaching Principles and the Design of Quality Tools for Educators*. Kesepuluh prinsip tersebut adalah:

Prinsip 1 : Siswa belajar banyak ketika mereka dilibatkan secara aktif selama pemberian tugas instruksional.

Prinsip 2 : Tingkat kesuksesan yang tinggi berkorelasi positif dengan hasil belajar siswa, dan tingkat kesuksesan yang rendah berkorelasi negatif dengan hasil belajar siswa.

Prinsip 3 : Kesempatan belajar yang ditingkatkan berkorelasi positif dengan pencapaian siswa yang ditingkatkan. Oleh karena itu, semakin banyak materi (*content*) yang tercakup, semakin besar potensi belajar siswa.

Prinsip 4 : Pencapaian siswa yang lebih tinggi di kelas-kelas di mana mereka menghabiskan banyak waktu dengan diajar secara langsung atau dibimbing secara langsung oleh guru mereka.

Prinsip 5 : Siswa dapat menjadi mandiri, siswa-siswa yang *self-regulated* melalui instruksi yang diberi *Scaffolding* secara bebas dan cermat.

Prinsip 6 : Bentuk-bentuk kritis pengetahuan disesuaikan dengan belajar strategi (*strategic learning*), yaitu (a) pengetahuan deklaratif (*declarative knowledge*), (b) pengetahuan prosedural (*procedural knowledge*), dan (c) pengetahuan kondisional (*conditional knowledge*). Masing-masing dari bentuk-bentuk ini harus disampaikan jika siswa diharapkan menjadi mandiri, siswa dapat menentukan apa yang harus ia lakukan/mengatur dirinya sendiri (*self-regulated*)

Prinsip 7 : Belajar ditingkatkan ketika Pembelajaran disajikan dalam suatu cara yang membantu siswa dalam mengorganisasikan, menyimpan, dan mendapatkan kembali pengetahuan.

Prinsip 8 : Para siswa dapat menjadi lebih mandiri, siswa yang *self-regulated* melalui instruksi strategis.

Prinsip 9 : Siswa dapat menjadi mandiri, siswa yang *self-regulated* melalui instruksi yang eksplisit.

Prinsip 10 : Dengan mengajarkan kesamaan (*sameness*) di dalam dan di luar pelajaran, guru mendorong kemampuan siswa untuk mengakses potensi yang relevan dengan situasi-situasi yang baru dalam *problem-solving*.

(<http://projects.coe.uga.edu/epltt/index.php?title=Scaffolding/>)

Berdasarkan sepuluh prinsip pengajaran efektif, ada empat komponen yang diperhatikan dan dideskripsikan pada penelitian ini yaitu (1) hasil belajar mahasiswa yaitu kemampuan kognitif yang ditunjukkan melalui skor yang diperoleh dari tes hasil belajar, (2) aktivitas mahasiswa pada penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*, (3) respons mahasiswa terhadap penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* di kelas, (4) deskripsi pemahaman mahasiswa terhadap materi Analisis Real I.

B. Hierarki Belajar Gagne

1. Pengertian Hierarki belajar Gagne

Hierarki merupakan urutan tingkatan abstraksi yang menyerupai struktur pohon. Hierarki membentuk urutan dengan aturan khusus atau berdasarkan peringkat (misalnya, kompleksitas dan tanggung jawabnya) (<http://id.shvoong.com/social->

sciences/education/2069530-pengertian-hierarki/). Menurut Gagne (Mardiyanti, 2010), Hierarki belajar adalah urutan kemampuan yang harus dikuasai oleh pebelajar (peserta didik) agar dapat mempelajari hal-hal yang lebih sulit atau lebih kompleks. (<http://mardhiyanti.blogspot.com/2010/03/teori-Hierarki-belajar-dari-robert-m.html>).

Selain itu, Gagne (dalam Orton, 2004: 42) mengemukakan bahwa Hierarki belajar dibangun dari atas ke bawah (*top-down*). Dimulai dengan menempatkan kemampuan, pengetahuan, ataupun keterampilan yang menjadi salah satu tujuan dalam proses pembelajaran di puncak dari Hierarki belajar tersebut, diikuti dengan kemampuan, keterampilan, atau pengetahuan prasyarat (*prerequisite*) yang harus dikuasai oleh siswa terlebih dahulu agar mereka berhasil mempelajari keterampilan atau pengetahuan di atasnya itu. Hierarki belajar dari Gagne tersebut memungkinkan adanya prasyarat yang berbeda untuk kemampuan yang berbeda pula (Orton, 1987).

Sebagai contoh, pemecahan masalah membutuhkan aturan, prinsip dan konsep-konsep terdefinisi sebagai prasyaratnya yang juga membutuhkan konsep konkrit sebagai prasyarat berikutnya, yang masih membutuhkan kemampuan membedakan (*discrimination*) sebagai prasyarat berikutnya lagi. Sifat Hierarkis ini berlaku dalam materi matematika. Bahkan sifat ini merupakan salah satu di antara karakteristik matematika. Hudojo (1990: 4) menyebutkan karakteristik matematika yang perlu diperhatikan adalah:

Matematika berkenaan dengan ide-ide/konsep-konsep abstrak yang tersusun secara Hierarkis dan penalarannya deduktif.

Dari kutipan tersebut, diketahui bahwa matematika itu terdiri dari konsep-konsep yang tersusun secara hierarkis dan berpola pikir deduktif. Sedangkan, menurut Soedjadi (2000: 13),

Tidak terdapat definisi tunggal tentang matematika yang telah disepakati. Meski demikian, setelah sedikit mendalami masing-masing definisi yang saling berbeda itu, dapat terlihat adanya ciri-ciri khusus atau karakteristik yang dapat merangkum pengertian matematika secara umum. Beberapa karakteristik itu adalah: (a) memiliki objek kajian abstrak; (b) bertumpu pada kesepakatan; (c) berpola pikir deduktif; (d) memiliki simbol yang kosong dari arti; (e) memperhatikan semesta pembicaraan; (f) konsisten dalam sistemnya.

Ini berarti bahwa setiap sistem mempunyai struktur tersendiri yang bersifat deduktif, yaitu dimulai dengan memilih beberapa unsur yang tidak didefinisikan atau unsur-unsur primitif. Hal senada diungkapkan oleh Tiro (dalam Muhammad Darwis, 1994: 26–27) bahwa matematika adalah suatu sistem aksiomatik yang memiliki karakteristik, yaitu: ada unsur-unsur primitif (*undefined terms*); ada perangkat postulat atau aksioma (*unproven statements*); semua definisi atau teorema dibuat dengan menggunakan unsur primitif, postulat, definisi atau teorema yang ada sebelumnya; nilai benar dan salah ditentukan atau diukur oleh hukum-hukum yang ada. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa dalam matematika terdapat urutan penalaran yang merupakan pola pikir hierarkis, di mana ide-ide, struktur-struktur dan hubungan-hubungan matematika diatur menurut urutan logis (Mansyur, 2008: 114).

Sifat hierarkis materi matematika juga diungkapkan oleh Cockroft (dalam Ernest, 1991: 238) bahwa:

Mathematics is a difficult subject both to teach and to learn. One of the reasons why this is so is that mathematics is a hierarchical subject

... ability to proceed to new work is very often dependent on a sufficient understanding of one or more pieces of work, which have gone before.

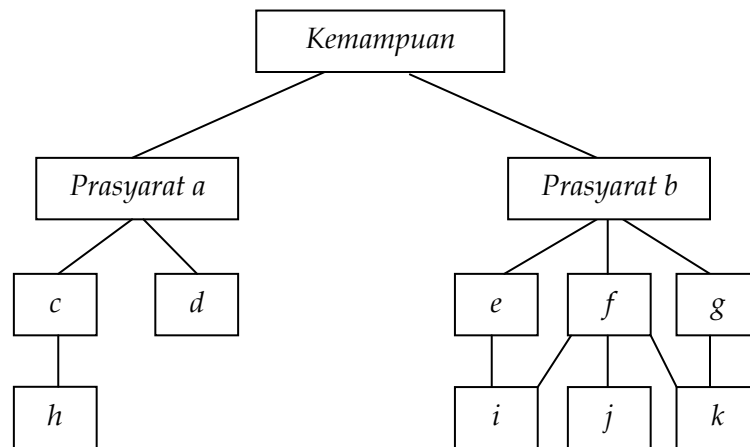
Dari kutipan tersebut, diketahui bahwa matematika adalah materi yang sulit untuk diajarkan dan dipelajari. Salah satu alasannya adalah karena matematika memiliki materi yang hierarkis. Ini berarti bahwa untuk dapat melanjutkan pada suatu pembahasan materi baru, seringkali sangat bergantung pada pemahaman yang cukup tentang materi atau masalah yang pernah dihadapi sebelumnya.

Beberapa pendapat ahli yang diuraikan di atas tentang hierarki belajar dan sifat hierarkis materi matematika seharusnya sudah menyadarkan kita akan pentingnya menyajikan materi matematika kepada peserta didik sesuai dengan teori belajar yang mengikuti pola pikir hierarkis pula. Ini berarti bahwa dalam pembelajaran, peserta didik melalui pola atau rute atau lintasan tertentu untuk mencapai tujuan pembelajaran. Hal ini sesuai dengan pernyataan Gagne (dalam Orton, 2004) bahwa:

Hierarki belajar ... mendeskripsikan sebuah rute yang secara rata-rata cukup untuk mencapai suatu himpunan keterampilan intelektual yang terorganisasi dan merepresentasikan 'pemahaman' tentang suatu topik.

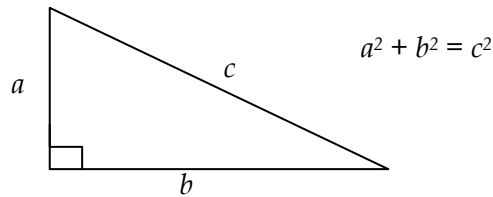
Aplikasi teori ini dimulai dari pendefinisian kemampuan yang merupakan tujuan akhir yang terletak pada puncak piramida (*top*). Kemampuan yang dimaksud harus didefinisikan sebagai tujuan *behavioral*. Sebagai contoh: peserta didik diharapkan dapat mengubah bilangan rasional yang berbentuk pecahan menjadi bilangan desimal, atau peserta didik diharapkan dapat menentukan hasil penjumlahan bilangan bulat. Tahap selanjutnya adalah menyelesaikan analisis tugas yang telah

dirinci dengan memperhatikan kemampuan prasyarat yang diperlukan untuk dapat mencapai kemampuan akhir (Gambar 1). Selanjutnya, penting untuk mengulang prosedur-prosedur, dengan mendefinisikan prasyarat yang diperlukan untuk mencapai prasyarat yang lebih dasar.



Gambar 2.1 Rincian Analisis Tugas dengan Memperhatikan Kemampuan Prasyarat yang Diperlukan untuk Mencapai Kemampuan Akhir

Hierarki belajar Gagne (dalam Orton, 2004) menyarankan bahwa prasyarat-prasyarat yang berbeda dapat terdiri dari atribut yang berbeda. Salah satu contohnya adalah teorema Pythagoras. Teorema ini menyatakan bahwa jumlah kuadrat panjang dua sisi siku-siku samadengan kuadrat sisi miringnya (*hipotenusa*). Teorema Pythagoras dapat dituliskan dalam bentuk $a^2 + b^2 = c^2$.



Gambar 2.2 Ilustrasi Hierarki belajar Gagne dalam Teorema Pythagoras

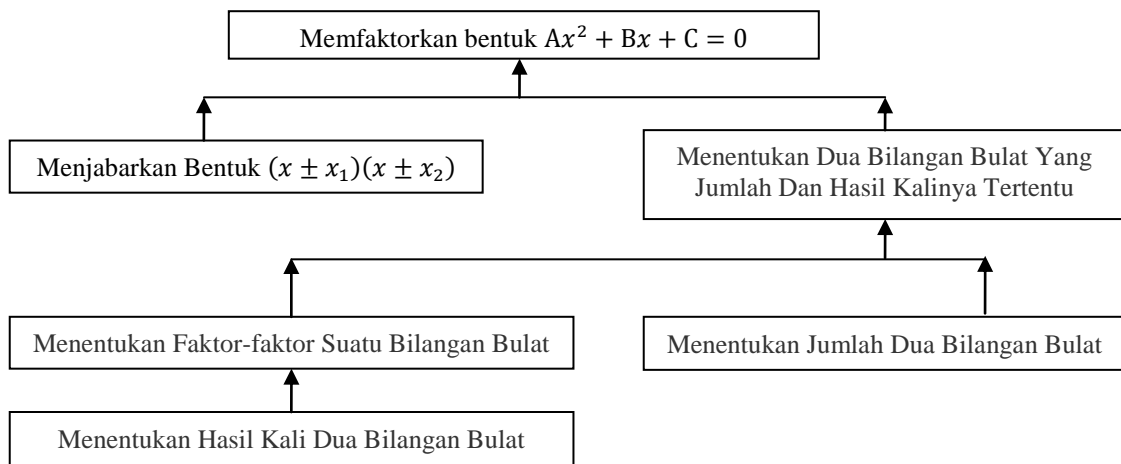
Bentuk ini jelas adalah suatu aturan tentang hubungan di antara atribut-atribut yang berbeda yang hanya berlaku pada segitiga siku-siku. Hubungan tersebut melibatkan belajar konsep. Sebagai contoh: mengkuadratkan, luas daerah, kesamaan, hasil jumlah, segitiga, segitiga siku-siku, panjang sisi, dan sudut. Konsep itu sendiri melibatkan diskriminasi. Sebagai contoh: antara panjang dan luas daerah atau antara mengkuadratkan dan menggandakan, dan konsep itu juga melibatkan klasifikasi. Sebagai contoh: klasifikasi yang bersifat umum untuk semua segitiga. Pengkuadratan level rendah melibatkan hasil kali. Sedangkan, cara yang paling efisien untuk menentukan hasil kali adalah mengetahui tabel perkalian. Pembelajaran tabel perkalian dapat melibatkan beberapa elemen stimulus respons yang diperlukan dalam mempelajari tabel perkalian itu seharusnya dipelajari (Orton, 2004: 44).

(http://www.google.co.id/#hl=id&gs_nf=1&cp=15&gs_id=3s&xhr=t&q=Hierarki+belajar&pf=p&sclient=psy-ab&oq=Hierarki+belajar&aq=0&aql=g2&aql=&gs_l=&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.r_qf.,cf.osb&fp=3333fd826b58b9f6)

Contoh lain tentang pemanfaatan hierarki belajar Gagne adalah pada pemfaktoran bentuk-bentuk aljabar, seperti: $x^2 - 2x - 35$ menjadi $(x - 7)(x + 5)$; $x^2 - 6x + 8$ menjadi $(x - 4)(x - 2)$; dan $x^2 + 6x - 7$ menjadi $(x - 7)(x +$

1). Pertanyaan awal yang dapat diajukan sebagaimana disarankan Gagne adalah: Pengetahuan apa yang lebih dahulu harus dikuasai siswa agar ia berhasil memfaktorkan? Jawabannya, di saat memfaktorkan bentuk seperti $x^2 - 2x - 35$, di mana -2 disebut koefisien x dan -35 disebut konstanta, para siswa harus mencari dua bilangan bulat yang jika dijumlahkan akan menghasilkan -2 (koefisien x) dan jika dikalikan akan menghasilkan -35 (konstanta). Kedua bilangan yang dicari tersebut adalah -7 dan $+5$, karena $-7 + (+5) = -2$ dan $(-7) \times (5) = -35$. Jika siswa mengalami kesulitan menentukan dua bilangan bulat yang jumlah dan hasil kalinya sudah tertentu, maka dapat dikatakan bahwa pengetahuan prasyarat mengenai penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat belum mantap, sehingga tidak mungkin mereka mampu memfaktorkan bentuk-bentuk tersebut dan mengembangkan keterampilan atau kemampuan yang lebih kompleks.

Dari masalah pemfaktoran di atas, seseorang dapat menyusun suatu hierarki belajar tentang memfaktorkan bentuk aljabar seperti yang ditunjukkan pada gambar 2.3 di bawah ini. Dari gambar 2.3 terlihat jelas bahwa pengetahuan atau keterampilan memfaktorkan yang telah ditetapkan menjadi salah satu tujuan pembelajaran khusus yang harus diletakkan di puncak hierarki belajar tersebut, kemudian diikuti oleh keterampilan atau pengetahuan prasyarat (*prerequisite*) yang harus dikuasai lebih dahulu agar para peserta didik berhasil mempelajari keterampilan atau pengetahuan di atasnya. Begitu seterusnya, sehingga didapatkan hierarki belajar tersebut.



Gambar 2.3 Ilustrasi Hierarki Belajar dalam Memfaktorkan Bentuk

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

Ilustrasi Hierarki Belajar Gagne pada Materi Analisis Real I

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional

Bukti:

Andaikan $\sqrt{2}$ bilangan rasional maka $\sqrt{2}$ dapat ditulis $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

p dan q relatif prim $(p, q) = 1$ (p dan q tidak memiliki persekutuan kecuali 1) . . . (*)

Dengan demikian dapat ditulis

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

$$\Rightarrow p^2 \text{ kelipatan } 2 \text{ sebab } q^2 \in \mathbb{N} \text{ sehingga } 2q^2 \text{ genap}$$

$$\Rightarrow p \text{ kelipatan } 2 \dots\dots\dots (1)$$

Karena p kelipatan 2, maka p genap sehingga dapat ditulis $p = 2m$, $m \in \mathbb{N}$

Perhatikan $p^2 = 2q^2$

$$\Rightarrow (2m)^2 = 2q^2$$

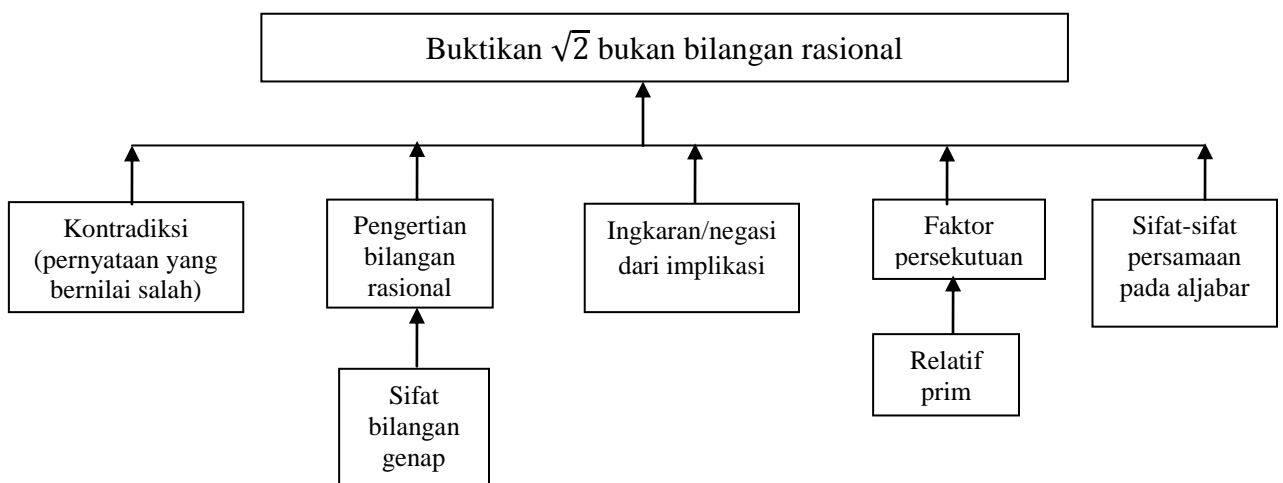
$$\Rightarrow 4m^2 = 2q^2$$

$$\Rightarrow 2m^2 = q^2$$

$\Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2$ genap jadi q^2 kelipatan 2 sebab $m^2 \in \mathbb{N}$ sehingga

$\Rightarrow q$ kelipatan 2 (2)

Dari (1) dan (2) disimpulkan p kelipatan 2 dan q kelipatan 2 (p dan q kelipatan 2), berarti 2 adalah faktor persekutuan dari p dan q . Hal ini bertentangan dengan (*) dengan demikian pengandaian bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional salah. Jadi $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional.



Gambar 2.4 Ilustrasi hierarki belajar Gagne dalam Membuktikan $\sqrt{2}$ Bukan Bilangan Rasional

C. Aplikasi Penerapan *scaffolding* yang Berorientasi pada Hierarki Belajar Gagne

Menurut Kamus Bahasa Indonesia, Orientasi adalah (1) peninjauan untuk menentukan sikap (arah, tempat, dsb) yang tepat dan benar dan (2) pandangan yang mendasari pikiran, perhatian atau kecenderungan, sedangkan berorientasi adalah (1) melihat-lihat atau meninjau (supaya lebih kenal atau lebih tahu) dan (2) mempunyai kecenderungan pandangan atau menitikberatkan pandangan; berkiblat. Adapun penerapan *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar Gagne adalah menerapkan pemberian bantuan atau *scaffolding* setelah mahasiswa mengalami kesulitan-kesulitan pada proses belajar dengan memberikan solusi salah satunya dengan mengacu atau mengarah kepada penerapan hierarki belajar Gagne yaitu menjelaskan materi-materi prasyarat yang dibutuhkan oleh mahasiswa dalam mempelajari materi tertentu.

Aplikasi penerapan *scaffolding* yang berorientasi pada hierarki belajar Gagne dan pemberian pada perkuliahan analisis real I ditunjukkan di bawah ini

Pada saat dosen mengajar pada pertemuan ketiga yaitu pembuktian bilangan rasional, dosen mengajar dengan menggunakan model pengajaran langsung yang terdiri dari lima fase di mana pada fase pertama, dosen memberikan penerapan *scaffolding* dilakukan pada fase pertama yaitu memberikan penguatan (apersepsi) secara sekilas terhadap materi-materi prasyarat yang berkaitan dengan pembuktian bilangan rasional, lalu pada fase kedua dosen mendemonstrasikan pengetahuan dan

keterampilan dengan menjelaskan pembuktian bilangan rasional yaitu membuktikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional kemudian pada fase ketiga dosen memberikan latihan mandiri dengan soal membuktikan $\sqrt{6}$ bukan bilangan rasional, pada fase ini mahasiswa mengalami berbagai kesulitan dalam membuktikan soal tersebut, ada yang kesulitan dalam memahami definisi bilangan rasional, relatif prim, menentukan metode pembuktian apa yang digunakan dalam menyelesaikan soal tersebut, atau kesulitan akibat kurang paham dalam memahami materi-materi prasyarat pada mata kuliah lain yang berkaitan dengan materi ini. Di sinilah pentingnya dosen memberikan *scaffolding* dengan menjelaskan materi prasyarat yang mendukung soal tersebut atau dengan kata lain pemberian *scaffolding* dengan mengacu pada hierarki belajar Gagne. Aplikasi penerapan hierarki belajar Gagne yang dosen lakukan adalah dengan memberikan penjelasan tentang definisi bilangan rasional, kelipatan dan faktor. Dosen menjelaskan bahwa bilangan rasional adalah bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ dosen meminta beberapa mahasiswa secara bergilir memberi contoh bilangan rasional untuk memastikan bahwa konsep bilangan rasional ini telah mereka pahami, selanjutnya dosen memberi beberapa contoh misalnya $\frac{2}{3}, \frac{10}{4}, \frac{2}{1}$ dsb. Kemudian dosen menjelaskan bahwa setiap bilangan rasional memiliki bentuk paling sederhana yaitu $\frac{p}{q}$ dengan p dan q relatif prim artinya FPBnya adalah 1, sebagai contoh bilangan rasional $\frac{4}{8}, \frac{3}{6}, \frac{10}{20}$ memiliki bentuk paling sederhana yaitu $\frac{1}{2}$. Bentuk ini amat penting sebab sering digunakan di dalam pembuktian yang sekaitan dengan

bilangan rasional. Dosen memberi contoh tentang pembuktian bahwa $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional dan menggunakan bukti dengan kontradiksi, segera setelah langkah ini mahasiswa diminta untuk membuktikan salah satu bilangan yang juga bukan bilangan rasional. Misalnya $\sqrt{6}$ (*dalam proses pembuktian ini mahasiswa tetap diberi kesempatan untuk mengemukakan kendala yang dialaminya, pada saat seperti inilah proses scaffolding tetap berlangsung disesuaikan dengan jenis masalah atau kendala yang dihadapi baik secara individu maupun secara klasikal. Hal ini dilakukan sebab menurut hierarki belajar Gagne, pemahaman yang lebih matang untuk materi-materi selanjutnya tidak akan dicapai manakala kendala-kendala itu tidak diatasi sesegera mungkin. Disinilah nampak jelas bahwa pemberian scaffolding dengan berorientasi pada hierarki belajar Gagne*) termasuk menjelaskan cara-cara pembuktian tak langsung yang pada umumnya belum dipahami oleh mahasiswa.

Berikut ini adalah tabel yang menunjukkan tentang bentuk *scaffolding* yang digunakan berdasarkan kendala yang dialami mahasiswa pada tiap-tiap langkah pembuktian disertai dengan materi-materi prasyarat yang seharusnya dipahami mahasiswa.

Tabel 2.1
Bentuk *Scaffolding* Berdasarkan Kendala-kendala yang diasumsikan/diduga
dialami
Mahasiswa dalam Pembuktian $\sqrt{6}$ Bukan Bilangan Rasional

No	Prosedur/langkah-langkah pembuktian	Kendala yang diduga dialami mahasiswa	Bentuk <i>scaffolding</i>	Jenis kesulitan/kendala berdasarkan materi prasyarat dan nonprasyarat
1	Mengandaikan $\sqrt{6}$ adalah bilangan rasional sehingga $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ p dan q relatif prim $(p, q) = 1$ (p dan q tidak memiliki persekutuan kecuali 1) . . . (*)	Tidak ada masalah	-	-
2	Kedua ruas dipangkatduakan sehingga menjadi $6 = \frac{p^2}{q^2}$	Tidak ada masalah	-	-
3	Mengalikan kedua ruas dengan q^2	Tidak ada masalah	-	-
4	Menyimpulkan bahwa $p^2 = 6q^2 \Rightarrow p^2$ kelipatan 6	Tidak ada masalah	-	-
5	Jika p^2 kelipatan 6 maka p kelipatan 6	Tidak dapat menunjukkan kebenaran implikasi pada langkah tersebut	Pikirkan bahwa $6 = 2 \cdot 3$ (memberikan petunjuk)	Logika matematika: implikasi Teori Bilangan: keterbagian
6	$p^2 = 2 \cdot 3 \cdot q^2$	Mahasiswa tidak memahami bahwa p^2 kelipatan 2 dan p^2	Menjelaskan bahwa $p^2 = 2 \cdot (3q^2), 3q^2 \in \mathbb{N}$ jadi p^2 kelipatan 2	Teori bilangan: kelipatan

		kelipatan 3	$p^2 = 3(2q^2), 2q^2 \in \mathbb{N}$ jadi p^2 kelipatan 3	
7	Jika p^2 kelipatan 2 maka p kelipatan 2 dan Jika p^2 kelipatan 3 maka p kelipatan 3	Tidak dapat menunjukkan kebenaran implikasi pada langkah tersebut	Dituntun/diberi petunjuk untuk menuntaskan langkah tersebut seperti pada bukti lengkap yang disajikan setelah tabel ini	Logika matematika: bukti tak langsung
8	Dari poin 7 disimpulkan p kelipatan 2 dan p kelipatan 3 akibatnya p kelipatan 6	Sulit mensintesis/menggabungkan kesimpulan itu	Memberi contoh-contoh bilangan yang merupakan kelipatan 2 sekaligus kelipatan 3, $6^2 = 36$, 36 adalah kelipatan 6 sehingga juga kelipatan 2 dan kelipatan 3	Logika Matematika
9	Karena p kelipatan 6 sehingga dapat ditulis $p = 6m, \forall m \in \mathbb{N}$	Tidak ada masalah	-	-
10	Memasukkan $p = 6m$ kedalam persamaan $p^2 = 6q^2, (6m)^2 = 6q^2$ $36m^2 = 6q^2$ $6q^2 = 36m^2$	Tidak ada masalah	-	-
11	Kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{6}$ sehingga menjadi $q^2 = 6m^2$	Tidak ada masalah	-	-
12	Menyimpulkan bahwa $q^2 = 6m^2 \Rightarrow q^2$ kelipatan 6	Tidak ada masalah	-	-
13	Jika q^2 kelipatan 6 maka q kelipatan 6	Tidak dapat menunjukkan kebenaran implikasi pada langkah tersebut	Pikirkan bahwa $6 = 2 \cdot 3$ (petunjuk)	Logika matematika: implikasi dan konjungsi
14	$q^2 = 2 \cdot 3 \cdot m^2$	Mahasiswa tidak memahami bahwa q^2 kelipatan 2 dan q^2 kelipatan 3	Menjelaskan bahwa $q^2 = 2 \cdot (3m^2), 3m^2 \in \mathbb{N}$ jadi q^2 kelipatan 2 $q^2 = 3(2m^2), 2m^2 \in \mathbb{N}$ jadi q^2 kelipatan 3	Teori bilangan: kelipatan

15	Jika q^2 kelipatan 2 maka q kelipatan 2 dan Jika q^2 kelipatan 3 maka q kelipatan 3	Tidak dapat menunjukkan kebenaran implikasi pada langkah tersebut	Dituntun/diberi petunjuk untuk menuntaskan langkah tersebut seperti pada bukti lengkap yang disajikan setelah tabel ini	Logika matematika: bukti tak langsung
16	Dari poin 7 disimpulkan q kelipatan 2 dan q kelipatan 3 akibatnya q kelipatan 6	Sulit mensintesis/menggabungkan kesimpulan itu	Memberi contoh-contoh bilangan yang merupakan kelipatan 2 sekaligus kelipatan 3, $6^2 = 36$, 36 adalah kelipatan 6 sehingga juga kelipatan 2 dan kelipatan 3	Teori bilangan: KPK
17	Karena p kelipatan 6 dan q kelipatan 6 sehingga p dan q mempunyai persekutuan lain yaitu 6. Hal ini bertentangan dengan (*)	Mahasiswa sulit menggabungkan dan menghubungkan pernyataan yang satu dengan pernyataan yang lain misalnya tidak menyadari bahwa pernyataan yang diperoleh tadi bertentangan dengan pernyataan sebelumnya yang telah diperoleh.	Dosen menyuruh mahasiswa melihat kembali langkah-langkah yang telah dikerjakan, kemudian menanyakan kepada mahasiswa apakah ada pernyataan yang bertentangan, dimana letak pertentangannya. <i>Scaffolding</i> dihentikan setelah timbul kesadaran mahasiswa bahwa ada 2 pernyataan yang bertentangan atau kontradiktif yaitu p dan q relatif prim; p dan q memiliki persekutuan lain yaitu 6.	Logika matematika : bukti dengan kontradiksi.
18	Menyimpulkan pengandaian bahwa $\sqrt{6}$ merupakan bilangan rasional salah. Jadi $\sqrt{6}$ bukan bilangan rasional.	Tidak ada kendala, sudah ada contoh sebelumnya.	-	-

Keterangan :

1. Pada prosedur pembuktian di atas unsur-unsur hierarki belajar Gagne yang terkait adalah sebagai berikut:
 - a. Bukti tak langsung
 - b. Definisi bilangan rasional
 - c. Sifat bilangan genap
 - d. Sifat-sifat persamaan pada aljabar
 - e. Faktor persekutuan
 - f. Relatif prim
 - g. Kelipatan dan KPK
 - h. Bukti dengan kontradiksi (pernyataan yang bernilai salah)
2. Prosedur bukti lengkap bahwa $\sqrt{6}$ adalah bukan bilangan rasional

Buktikan bahwa $\sqrt{6}$ bukan bilangan rasional!

Bukti:

Andaikan $\sqrt{6}$ bilangan rasional maka $\sqrt{6}$ dapat ditulis $\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

p dan q relatif prim $(p, q) = 1$ (p dan q tidak memiliki persekutuan kecuali 1) . .(*)

Dengan demikian dapat ditulis

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q} \Rightarrow 6 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 6q^2 = 2 \cdot 3 \cdot q^2$$

$$\Rightarrow p^2 \text{ kelipatan } 2 \overset{ya}{\Rightarrow} p \text{ kelipatan } 2$$

(telah dibuktikan pada contoh sebelumnya)

$$\Rightarrow p^2 \text{ kelipatan } 3 \overset{???}{\Rightarrow} p \text{ kelipatan } 3$$

Dibuktikan dengan menggunakan bukti tak langsung (bukti kontraposisif)

sehingga akan dibuktikan bahwa p bukan kelipatan 3 $\Rightarrow p^2$ bukan kelipatan 3

$$p \neq 3m, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$p^2 \neq 9m^2, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$p^2 \neq 3(3m^2), 3m^2 = k$$

$$p^2 \neq 3k, \forall k \in \mathbb{N} \text{ dengan } k = 3m^2$$

Sehingga p^2 bukan kelipatan 3, jadi terbukti

$$\left. \begin{array}{l} p^2 \text{ kelipatan } 2 \Rightarrow p \text{ kelipatan } 2 \\ p^2 \text{ kelipatan } 3 \Rightarrow p \text{ kelipatan } 3 \end{array} \right\} \text{ dan}$$

$$\Rightarrow p \text{ kelipatan } 2 \text{ dan } 3$$

$$\Rightarrow p \text{ kelipatan } 6 \dots\dots\dots (1)$$

Karena p kelipatan 6, sehingga dapat ditulis $p = 6m, \forall m \in \mathbb{N}$

$$\text{Perhatikan } p^2 = 6q^2$$

$$\Rightarrow (6m)^2 = 6q^2$$

$$\Rightarrow 36m^2 = 6q^2$$

$$\Rightarrow 6m^2 = q^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 6m^2 = 2 \cdot 3 \cdot m^2$$

$$\Rightarrow q^2 \text{ kelipatan } 2 \stackrel{ya}{\Rightarrow} q \text{ kelipatan } 2$$

(telah dibuktikan pada contoh sebelumnya)

$$\Rightarrow q^2 \text{ kelipatan } 3 \stackrel{???}{\Rightarrow} q \text{ kelipatan } 3$$

(telah dibuktikan pada $p^2 \text{ kelipatan } 3 \stackrel{???}{\Rightarrow} p \text{ kelipatan } 3$)

Dibuktikan dengan menggunakan bukti tak langsung (bukti kontraposisif)

sehingga akan dibuktikan bahwa $q \text{ bukan kelipatan } 3 \Rightarrow q^2 \text{ bukan kelipatan } 3$

$$q \neq 3t, \forall t \in \mathbb{N}$$

$$q^2 \neq 9t^2, \forall t \in \mathbb{N}$$

$$q^2 \neq 3(3t^2), 3t^2 = h$$

$$q^2 \neq 3h, \forall h \in \mathbb{N} \text{ dengan } h = 3t^2$$

Sehingga q^2 bukan kelipatan 3, jadi terbukti

$$\left. \begin{array}{l} q^2 \text{ kelipatan } 2 \Rightarrow q \text{ kelipatan } 2 \\ q^2 \text{ kelipatan } 3 \Rightarrow q \text{ kelipatan } 3 \end{array} \right\} \text{ dan}$$

$$\Rightarrow q \text{ kelipatan } 2 \text{ dan } 3$$

$$\Rightarrow q \text{ kelipatan } 6 \dots\dots\dots (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan p kelipatan 6 dan q kelipatan 6 (p dan q kelipatan 6), berarti 6 adalah faktor persekutuan dari p dan q . Hal ini bertentangan dengan (*) dengan demikian pengandaian bahwa $\sqrt{6}$ merupakan bilangan rasional salah. Jadi $\sqrt{6}$ bukan bilangan rasional.

D. Model Pengajaran Langsung

1. Pengertian

Model merupakan suatu objek atau konsep yang digunakan untuk mempresentasikan sesuatu hal. Sesuatu yang nyata dan dikonversi untuk sebuah bentuk yang lebih komprehensif Meyer (dalam Trianto, 2009: 21). Sedangkan, model pembelajaran adalah suatu perencanaan atau pola yang digunakan sebagai pedoman dalam merencanakan pembelajaran di kelas atau pembelajaran dalam tutorial dan untuk menentukan perangkat-perangkat pembelajaran termasuk di dalamnya buku-buku, film, komputer, kurikulum, dan lain-lain

Pengajaran langsung adalah suatu model pengajaran yang bersifat *teacher-centered*. Menurut Arends (2012), model pengajaran langsung adalah salah satu pendekatan mengajar yang dirancang khusus untuk menunjang proses belajar siswa

yang berkaitan dengan pengetahuan deklaratif dan pengetahuan prosedural yang terstruktur dengan baik yang dapat diajarkan dengan pola kegiatan yang bertahap, selangkah demi selangkah. Pengetahuan deklaratif (dapat diungkapkan dengan kata-kata) adalah pengetahuan tentang sesuatu, sedangkan pengetahuan prosedural adalah pengetahuan tentang bagaimana melakukan sesuatu (Kardi dan Nur, 2000: 4). Selain itu, model pengajaran langsung ditujukan pula untuk membantu mahasiswa mempelajari keterampilan dasar dan memperoleh informasi yang dapat diajarkan selangkah demi selangkah.

Adapun beberapa situasi yang sesuai dengan model pengajaran langsung, yaitu:

1. Ketika dosen atau guru ingin mengenalkan suatu bidang pembelajaran yang baru dan memberikan garis besar pelajaran dengan mendefinisikan konsep-konsep kunci dan menunjukkan keterkaitan di antara konsep-konsep tersebut.
2. Ketika dosen atau guru ingin mengajari siswa atau mahasiswa suatu keterampilan atau prosedur yang memiliki struktur yang jelas dan pasti.
3. Ketika dosen atau guru ingin memastikan bahwa mahasiswa atau siswa telah menguasai keterampilan-keterampilan dasar yang diperlukan dalam kegiatan yang berpusat pada siswa atau mahasiswa, misalnya penyelesaian masalah (*problem solving*).
4. Ketika dosen atau guru ingin menunjukkan sikap dan pendekatan-pendekatan intelektual (misalnya menunjukkan bahwa suatu argumen harus didukung oleh

bukti-bukti, atau bahwa suatu penjelajahan ide tidak selalu berujung pada jawaban yang logis).

5. Ketika subjek pembelajaran yang akan diajarkan cocok untuk dipresentasikan dengan pola penjelasan, pemodelan, pertanyaan, dan penerapan.
6. Ketika dosen atau guru ingin menumbuhkan ketertarikan mahasiswa atau siswa akan suatu topik.
7. Ketika dosen atau guru harus menunjukkan teknik atau prosedur-prosedur tertentu sebelum mahasiswa atau siswa melakukan suatu kegiatan praktik.
8. Ketika dosen atau guru ingin menyampaikan kerangka parameter-parameter untuk memandu mahasiswa atau siswa dalam melakukan kegiatan pembelajaran kelompok atau independen.
9. Ketika para mahasiswa atau siswa menghadapi kesulitan yang sama yang dapat diatasi dengan penjelasan yang sangat terstruktur.
10. Ketika lingkungan mengajar tidak sesuai dengan strategi yang berpusat pada mahasiswa atau siswa atau ketika dosen atau guru tidak memiliki waktu untuk melakukan pendekatan yang berpusat pada mahasiswa atau siswa.

2. Sintaks Model Pengajaran Langsung

Pada model pengajaran langsung terdapat lima fase yang sangat penting. Dosen atau guru mengawali pelajaran dengan penjelasan tentang tujuan dan latar belakang pengajaran, serta mempersiapkan mahasiswa atau siswa untuk menerima

penjelasan dosen atau guru. Sintaks model pengajaran langsung tersebut disajikan dalam lima tahap (Arends, 2012: 304), seperti ditunjukkan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 2.2
Sintaks Model Pengajaran Langsung

Fase	Peran Dosen
Fase 1 Menyampaikan tujuan dan mempersiapkan mahasiswa	Dosen menjelaskan TPK, informasi latar belakang pelajaran, pentingnya pelajaran, mempersiapkan mahasiswa untuk belajar.
Fase 2 Mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan	Dosen mendemonstrasikan keterampilan dengan benar, atau menyajikan informasi tahap demi tahap
Fase 3 Membimbing pelatihan	Dosen merencanakan dan memberi bimbingan pelatihan awal
Fase 4 Mengecek pemahaman dan memberi umpan balik	Mencek apakah mahasiswa telah berhasil melakukan tugas dengan baik, memberi umpan balik
Fase 5 Memberi kesempatan untuk pelatihan lanjutan dan penerapan	Dosen mempersiapkan kesempatan melakukan pelatihan lanjutan, dengan perhatian khusus pada penerapan kepada situasi lebih kompleks dan kehidupan sehari-hari

Slavin (2006: 212) mengemukakan tujuh langkah dalam sintaks pembelajaran langsung, yaitu sebagai berikut:

1. Menginformasikan tujuan pembelajaran dan orientasi pelajaran kepada mahasiswa. Dalam fase ini dosen menginformasikan hal-hal yang harus dipelajari dan kinerja mahasiswa yang diharapkan.
2. Mereview pengetahuan dan keterampilan prasyarat. Dalam fase ini dosen mengajukan pertanyaan untuk mengungkapkan pengetahuan dan keterampilan yang telah dikuasai mahasiswa.

3. Menyampaikan materi pelajaran. Dalam fase ini , dosen menyampaikan materi, menyajikan informasi, memberikan contoh-contoh, mendemostrasikan konsep dan sebagainya.
4. Melaksanakan bimbingan, dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan untuk menilai tingkat pemahaman mahasiswa dan mengoreksi kesalahan konsep.
5. Memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk berlatih. Dalam fase ini, dosen memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk melatih keterampilannya atau menggunakan informasi baru secara individu atau kelompok.
6. Menilai kinerja mahasiswa dan memberikan umpan balik. Dosen memberikan review terhadap hal-hal yang telah dilakukan mahasiswa, memberikan umpan balik terhadap respons mahasiswa yang benar dan mengulang keterampilan jika diperlukan.
7. Memberikan latihan mandiri. Dalam fase ini, dosen dapat memberikan tugas-tugas mandiri kepada mahasiswa untuk meningkatkan pemahamannya terhadap materi yang telah dipelajari.

Berdasarkan kedua sintaks di atas, dalam penelitian ini akan digunakan sintaks model pengajaran langsung lima langkah yang diungkapkan oleh Arends.

3. Kelebihan dan Kekurangan Model Pengajaran Langsung

Tiap model pembelajaran memiliki kelebihan dan kekurangan yang membuat model pembelajaran tersebut lebih baik atau kurang baik digunakan dibandingkan dengan model pembelajaran lainnya. Model Pengajaran Langsung pun mempunyai

beberapa kelebihan dan kekurangan. Beberapa kelebihan Model Pengajaran langsung, yaitu:

- a. Dengan Model Pengajaran Langsung, dosen mengendalikan isi materi dan urutan informasi yang diterima oleh mahasiswa sehingga dapat mempertahankan fokus mengenai apa yang harus dicapai oleh mahasiswa.
- b. Merupakan cara yang paling efektif untuk mengajarkan konsep dan keterampilan-keterampilan yang eksplisit kepada mahasiswa yang berprestasi rendah sekalipun.
- c. Model ini dapat digunakan untuk membangun model pengajaran dalam bidang studi tertentu. Dosen dapat menunjukan bagaimana suatu permasalahan dapat didekati, bagaimana informasi dianalisis, bagaimana suatu pengetahuan dihasilkan.
- d. Menekankan kegiatan mendengarkan (melalui ceramah) dan kegiatan mengamati (melalui demonstrasi), sehingga membantu siswa yang cocok belajar dengan cara-cara ini.
- e. Model Pengajaran Langsung (terutama kegiatan demonstrasi) dapat memberikan tantangan untuk mempertimbangkan kesenjangan antara teori (hal yang seharusnya) dan observasi (kenyataan yang terjadi).
- f. Dapat diterapkan secara efektif dalam kelas besar maupun kelas yang kecil.
- g. Siswa dapat mengetahui tujuan-tujuan pengajaran dengan jelas.
- h. Waktu untuk berbagi kegiatan pembelajaran dapat dikontrol dengan ketat.
- i. Dalam model ini terdapat penekanan pada pencapaian akademik.
- j. Kinerja siswa dapat dipantau secara cermat.

- k. Umpan balik bagi siswa berorientasi akademik.
- l. Dapat menekankan poin-poin penting atau kesulitan-kesulitan yang mungkin dihadapi siswa.
- m. Dapat menjadi cara yang efektif untuk mengajarkan informasi dan pengetahuan faktual dan terstruktur.

(<http://ekagurunesama.blogspot.com/2010/07/kelebihan-model-pembelajaran-langsung.html>)

Sedangkan, beberapa keterbatasan pada Model Pengajaran Langsung adalah:

- a. Karena dosen memainkan peranan pusat dalam model ini, maka kesuksesan pengajaran ini bergantung pada image dosen. Jika dosen tidak tampak siap, berpengetahuan, percaya diri, antusias dan terstruktur, mahasiswa dapat menjadi bosan, teralihkan perhatiannya, dan pembelajaran akan terhambat.
- b. Sangat bergantung pada gaya komunikasi dosen. Komunikator yang kurang baik cenderung menjadikan pembelajaran yang kurang baik pula.
- c. Jika materi yang disampaikan bersifat kompleks, rinci atau abstrak, Model Pengajaran Langsung mungkin tidak dapat memberikan mahasiswa kesempatan yang cukup untuk memproses dan memahami informasi yang disampaikan.
- d. Jika terlalu sering digunakan akan membuat mahasiswa percaya bahwa dosen akan memberitahu mahasiswa semua yang perlu diketahui. Hal ini akan menghilangkan rasa tanggung jawab mengenai pembelajaran mahasiswa itu sendiri.

- e. Demonstrasi sangat bergantung pada keterampilan pengamatan mahasiswa. Sayangnya, banyak mahasiswa bukanlah merupakan pengamat yang baik sehingga dapat melewatkan hal-hal yang dimaksudkan oleh dosen.

(<http://ekagurunesama.blogspot.com/2010/07/kekurangan-pembelajaran-langsung-direct.html>)

E. Pemahaman Konsep dan Prinsip

1. Pemahaman

Ada dua istilah yang tidak dapat dilepaskan dari kata ‘pemahaman’, yaitu asimilasi dan akomodasi. Piaget menyatakan bahwa proses terjadinya adaptasi skema yang telah terbentuk dengan stimulus baru dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu asimilasi dan akomodasi (Hudojo, 2005). Asimilasi merupakan proses pengintegrasian secara langsung stimulus baru ke dalam skema yang telah ada. Stimulus baru yang dimaksudkan di sini adalah persepsi, konsep, ataupun pengalaman baru (Suparno, 1997). Sedangkan, akomodasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru melalui pengubahan skema lama atau pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan stimulus yang diterima.

Menurut Skemp (1987), bahwa ‘memahami sesuatu’ berarti mengasimilasi sesuatu ke dalam suatu skema yang tepat. Skema tersebut digunakan untuk memproses dan mengidentifikasi rangsangan dari luar. Dalam mengasimilasi,

seseorang tidak lagi perlu mengubah skema yang ada, karena struktur masalah telah sesuai dengan skema yang telah tersedia. Ini berarti bahwa dalam ‘memahami sesuatu’, tidak ada pergantian skema melainkan pengembangan skema yang sudah ada.

‘Pemahaman’ terdiri atas beberapa tingkatan dan jenis. Polya mengemukakan empat tingkat pemahaman, yaitu:

1. Pemahaman mekanikal adalah mengingat dan menerapkan rumus secara rutin dan melakukan perhitungan sederhana.
2. Pemahaman induktif adalah menerapkan rumus dan konsep dalam kasus sederhana dan tahu bahwa rumus tersebut dapat diberlakukan pada kasus yang serupa.
3. Pemahaman relasional adalah membuktikan kebenaran rumus dan teorema.
4. Pemahaman intuitif adalah memperkirakan kebenaran sesuatu dengan pasti (tanpa ragu-ragu) sebelum melakukan analisis lebih lanjut.

Jenis pemahaman menurut Anderson dkk. ada tujuh, yaitu: (1) menginterpretasikan (*interpreting*), (2) memberikan contoh (*exemplifying*), (3) mengklasifikasikan (*classifying*), (4) merangkum (*summarizing*), (5) menyimpulkan (*inferring*), (6) membandingkan (*comparing*), dan (7) menjelaskan (*explaining*). Menurut Russefendi (2006: 221) ada tiga jenis pemahaman, yaitu: (1) penerjemahan (*translation*) dalam matematika, misalnya mampu mengubah soal dalam bentuk kata-kata ke dalam simbol dan sebaliknya; (2) pemberian arti (*interpretation*), misalnya mampu

mengartikan suatu kesamaan; (3) pembuatan ekstrapolasi (*extrapolation*), misalnya mampu memperkirakan suatu kecenderungan dari diagram.

Selanjutnya, menurut Skemp (1987), ada 3 jenis pemahaman yang berbeda, yaitu: (1) pemahaman instrumental (*instrumental understanding*) adalah kemampuan menggunakan aturan yang diingat secara tepat terhadap penyelesaian atau solusi dari suatu masalah, tanpa mengetahui mengapa aturan tersebut berlaku; (2) pemahaman relasional (*relational understanding*) adalah kemampuan mendeduksi aturan-aturan atau prosedur-prosedur tertentu dari hubungan-hubungan matematis yang lebih umum; (3) pemahaman formal (logis) (*formal understanding*) adalah kemampuan menghubungkan simbolisme dan notasi matematika dengan ide-ide matematika yang relevan dan menggabungkan ide-ide matematika tersebut ke dalam rantai penalaran logis. Dengan demikian, jenis pemahaman yang sesuai dengan tujuan penelitian ini adalah pemahaman menurut Skemp yaitu: (1) pemahaman instrumental, (2) pemahaman korelasional, (3) pemahaman formal.

2. Konsep dan Prinsip

Dalam matematika, terdapat objek dasar. Objek dasar tersebut bersifat abstrak, sehingga sering juga disebut objek mental atau objek pikiran. Dari objek dasar itulah dapat disusun suatu pola dan struktur matematika. Objek-objek yang dimaksud adalah fakta, konsep, prinsip, dan operasi (Soedjadi, 2007: 8). Dari keempat objek matematika tersebut, yang menjadi fokus dalam bahasan ini adalah konsep dan

prinsip. Oleh karena itu, uraian tentang objek dasar matematika dibatasi hanya pada kedua objek tersebut. Kedua objek tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut.

1. Konsep adalah ide abstrak yang dapat digunakan untuk mengelompokkan atau mengklasifikasikan sekumpulan objek. Apakah objek tertentu merupakan contoh konsep ataukah bukan. "Segitiga" adalah nama suatu konsep abstrak. Dengan konsep itu, sekumpulan objek dapat digolongkan sebagai contoh segitiga atau bukan contoh, "Bilangan asli" adalah nama suatu konsep yang lebih kompleks. Dikatakan lebih kompleks, karena bilangan asli terdiri atas banyak konsep sederhana, yaitu bilangan "satu", "dua", "tiga", dan seterusnya. Dalam matematika, terdapat konsep yang amat penting, yaitu: "fungsi", "variabel", dan "konstanta". Konsep tersebut, seperti halnya dengan bilangan, terdapat di semua cabang matematika. Banyak konsep lain dalam matematika yang sifatnya lebih kompleks, misalnya "matriks", "vektor", "grup", dan "ruang metrik".
2. Prinsip (abstrak) adalah objek matematika yang kompleks. Prinsip dapat terdiri atas beberapa fakta, beberapa konsep yang dikaitkan oleh suatu relasi ataupun operasi. Secara sederhana dapatlah dikatakan bahwa prinsip adalah hubungan antara berbagai objek dasar matematika. Prinsip dapat berupa "aksioma", "teorema", "sifat", dan sebagainya.

Dalam kaitannya dengan penelitian ini, yaitu konsep dan prinsip pada sistem bilangan real, dirasa perlu untuk menjelaskan lebih jauh tentang konsep dan prinsip, walaupun telah dibahas sepintas di atas.

Bell (1978) mengemukakan bahwa konsep dalam matematika adalah suatu ide abstrak yang memungkinkan kita untuk dapat mengklasifikasikan (mengelompokkan) objek atau kejadian, dan menerangkan apakah objek atau kejadian itu merupakan contoh atau bukan contoh dari ide tersebut (Muhammad Darwis, 1994: 2). Hal ini sejalan pengertian konsep menurut Gagne yang telah dikemukakan sebelumnya. Menurut Dienes (dalam Ruseffendi, 1988 : 157), konsep itu adalah struktur matematika yang terdiri dari tiga macam, yaitu:

1. Konsep matematika murni (*pure mathematical concepts*): berkenaan dengan mengelompokkan bilangan dan hubungan antara bilangan tanpa mempertimbangkan bagaimana bilangan itu disajikan
2. Konsep notasi (*notational concepts*): berkenaan dengan sifat-sifat bilangan sebagai akibat dari bilangan itu disajikan
3. Konsep terapan (*applied concepts*): berkenaan dengan aplikasi konsep murni dan konsep notasi dalam pemecahan soal-soal matematika, dan dalam bidang studi lain yang berhubungan.

Telah dijelaskan di atas bahwa konsep dalam matematika merupakan salah satu objek disamping tiga objek yang lain, yaitu: fakta, operasi, dan prinsip. Selain itu, konsep-konsep dalam matematika pada umumnya disusun dari konsep-konsep terdahulu dan juga fakta-fakta. Sedang untuk menunjukkan sesuatu konsep tertentu, digunakan batasan atau definisi (Soedjadi, 1985). Hal ini memberikan gambaran bahwa suatu konsep pada umumnya digunakan secara berkesinambungan untuk menjelaskan konsep-konsep yang lain dalam matematika, karena sifat matematika adalah hierarkis.

Dengan demikian, kesalahan konsep yang diterima oleh siswa akan berakibat fatal untuk mempelajari konsep-konsep berikutnya.

Selanjutnya, Hunt, Marin & Stone (dalam Muhammad Darwis, 1994) mengemukakan “*A concept is decision rule which, when applied to description of an object, specifies whether or not a name can be applied*”. Jadi, konsep adalah suatu aturan yang tegas bila dipakai untuk menggambarkan suatu objek dan menentukan apakah suatu nama (istilah) dapat dipakai atau tidak. Misalnya, siswa yang telah mengetahui konsep lingkaran sebagai tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama pada satu titik tertentu pada bidang datar, maka siswa tersebut mempunyai aturan yang dapat digunakan untuk menyatakan apakah suatu objek dapat disebut atau diberi nama lingkaran. Hal ini, sejalan dengan Geach bahwa N telah mendapatkan konsep p, berarti N telah belajar bagaimana menggunakan istilah p. oleh Ausebel hal ini disebut sebagai perpaduan konsep (*concept assimilation*) di mana seseorang mendapatkan konsep-konsep dengan menggunakan konsep yang lain.

Konsep dalam matematika sering dijelaskan melalui definisi atau batasan, atau melalui contoh-contoh. Konsep-konsep dalam analisis real misalnya: fungsi, bilangan real (\mathbb{R}), supremum, infimum, $|x|$ (nilai mutlak x), sistem, deret, konvergen, divergen, monoton, limit sistem dan sebagainya. Suatu konsep pada umumnya disusun atau dibentuk dari konsep-konsep yang lain atau fakta-fakta yang sudah dikenal lebih dahulu.

3. Pemahaman Konsep dan Prinsip

Peserta didik telah memahami suatu konsep yang didefinisikan bila peserta didik itu dapat mendemonstrasikan atau menunjukkan bagaimana menggunakan definisi itu. Ini berarti bahwa peserta didik harus dapat mengklasifikasikan contoh-contoh konsep itu (Hudojo, 1990). Selain itu, seseorang dikatakan telah memahami suatu konsep apabila seseorang itu mampu memisahkan contoh-contoh konsep itu dari noncontoh (Bell, 1978). Sedangkan, prinsip adalah sederetan konsep bersamasama dengan hubungan-hubungan di antara konsep-konsep itu. Dengan demikian, seseorang dikatakan telah memahami prinsip apabila seseorang tersebut telah mengetahui konsep-konsep tertentu dan hubungan di antara konsep-konsep itu (Bell, 1978).

4. Mata kuliah Analisis Real I

Sebelum masuk ke dalam matakuliah Analisis Real I, mahasiswa seharusnya telah menguasai materi prasyarat. Materi tersebut adalah materi dalam mata kuliah Aljabar Elementer, Kalkulus I, dan Logika matematika. Penguasaan logika matematika dibutuhkan untuk memahami konsep berupa definisi dan memahami prinsip berupa teorema, karena teorema hampir selalu memuat pernyataan yang berbentuk implikasi.

Tabel 2.3
Penguasaan Sistem Bilangan Real berdasar pada materi Aljabar Elementer, Kalkulus I dan Logika Matematika.

Materi Aljabar Elementer, Kalkulus I dan Logika Matematika yang berkaitan dengan Materi Analisis Real I	Materi mata kuliah Analisis Real I
<ul style="list-style-type: none"> • Materi penunjang pada matakuliah Aljabar Elementer: <ol style="list-style-type: none"> 1. Tinjauan Aritmetika (faktor, hasil perkalian, pangkat, faktorisasi prima, KPK (kelipatan persekutuan terkecil), pecahan ekivalen, operasi pada pecahan pecahan desimal dan persen) 2. Bentuk dan Persamaan Aljabar. 3. Pemecahan Persamaan dan Pertidaksamaan Linear. 4. Pemfaktoran Polinomial. 5. Bentuk Rasional. 6. Akar, Bentuk Akar dan Persamaan Akar Pangkat Dua. 7. Persamaan Kuadrat. 8. Fungsi-fungsi Aljabar dan Grafiknya. • Materi penunjang pada matakuliah Kalkulus I: <ol style="list-style-type: none"> 1. Sistem Bilangan Real 2. Garis Bilangan, Selang 3. Nilai Mutlak 4. Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak • Materi pada Logika Matematika: <ol style="list-style-type: none"> 1. Operasi-operasi Pernyataan (Konjungsi, Disjungsi, Implikasi, Biimplikasi dan Negasi) 2. Kuantor 	<p>Sistem Bilangan Real:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Sifat Aljabar pada Bilangan Real. 2. Sifat Urutan pada Bilangan Real. 3. Sifat Kelengkapan pada Bilangan Real.

F. Kerangka Berpikir

1. Kedudukan *Scaffolding* dalam Perkuliahan Analisis Real I

Telah dibahas pada awal bab II bahwa *scaffolding* merupakan pemberian bantuan yang diberikan kepada mahasiswa sesuai dengan tingkat kebutuhan mahasiswa untuk mengatasi kesulitan yang dialami, namun bantuan tersebut diberikan pada tahap-tahap awal pembelajaran, dikurangi atau bahkan dihentikan ketika mahasiswa sudah mampu melanjutkan tugas yang diberikan dosen secara mandiri. Penerapan *scaffolding* pada perkuliahan Analisis real diperlukan mahasiswa karena mata kuliah Analisis real merupakan mata kuliah yang dianggap sulit oleh mahasiswa karena mata kuliah ini melibatkan konsep dan prinsip serta manipulasi matematika berupa keterampilan yang tidak dapat dengan mudah langsung dipahami oleh mahasiswa, oleh karena itu dalam mempelajarinya mahasiswa akan cenderung mengalami kesulitan, nah disinilah diperlukan strategi pengajaran yaitu dengan memberikan *scaffolding* dengan memberikan beberapa jenis bantuan berupa petunjuk, peringatan, dorongan, menguraikan masalah ke dalam bentuk lain yang memungkinkan mahasiswa dapat mandiri dalam memecahkan masalah.

2. Kedudukan Hierarki Belajar Gagne dalam Perkuliahan Analisis Real I

Sifat hierarkis berlaku dalam materi matematika, begitupula dengan materi Analisis Real, sehingga dalam pembelajaran Analisis Real mahasiswa seharusnya telah mengetahui materi prasyarat sebelum memasuki materi tertentu. Dalam mempelajari materi Analisis Real, banyak kesulitan yang didapatkan mahasiswa

pada proses belajarnya, oleh karena itu pemberian *scaffolding* atau bantuan yang diberikan dosen kepada mahasiswa berorientasi pada pengaplikasian hierarki belajar Gagne yaitu dengan menjelaskan materi prasyarat yang belum dipahami dan dibutuhkan mahasiswa dalam memecahkan masalah.

3. Penerapan *Scaffolding* dan Hierarki Belajar Gagne dalam Pengajaran Langsung

Pada model pengajaran langsung penerapan *scaffolding* dilakukan pada fase pertama yaitu menyampaikan tujuan dan mempersiapkan mahasiswa atau apersepsi, dimana dosen secara singkat mengingatkan materi-materi sebelumnya yang terkait dengan materi yang akan diajarkan, kemudian pada fase ketiga yaitu dosen membimbing pelatihan dengan memberikan latihan mandiri kepada mahasiswa, tentunya pada fase ini mahasiswa mengerjakan soal-soal mandiri tanpa melepaskan peran dosen dalam memberikan *scaffolding* serta pada fase keempat yaitu mengecek pemahaman mahasiswa, apakah telah berhasil mengerjakan tugas dengan baik dan memberikan umpan balik terhadap respons mahasiswa yang benar dan mengulang keterampilan jika terjadi kesalahan. Apabila mahasiswa mengalami kesulitan, dosen melihat kesulitan-kesulitan apa saja yang mereka rasakan, kemudian di dalam mengatasi kesulitan-kesulitan tersebut sedikit banyaknya melibatkan materi prasyarat yang seharusnya telah mereka ketahui sebelum masuk mata kuliah ini, atau dengan kata lain pada perkuliahan ini dosen memberikan *scaffolding* dengan berorientasi pada hierarki belajar Gagne.

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini adalah *mixed qualitative-quantitative method* (penelitian gabungan kualitatif-kuantitatif) yang dominan tergolong deskriptif kualitatif dan eksploratif. Penelitian ini dilakukan untuk mendeskripsikan respon, aktivitas, hasil belajar, serta pemahaman mahasiswa terhadap perkuliahan Analisis Real I yang menerapkan hierarki belajar Gagne dan pemberian *Scaffolding* setting pengajaran langsung secara kualitatif.

Sifat eksploratif dari penelitian ini, yakni bermaksud mengeksplor pemahaman konsep dan prinsip Sistem Bilangan Real mahasiswa dalam penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* pada mata kuliah Analisis Real I dan mendeskripsikan dampak-dampak yang dihasilkan dari penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* secara apa adanya tanpa mengkonfirmasi kepada teori-teori tertentu.

Walaupun penelitian ini lebih menonjol pada jenis penelitian kualitatif, namun khusus untuk hasil belajar mahasiswa lebih ditekankan pada data kuantitatif yang nantinya akan dianalisis secara kuantitatif (teknik statistik) yaitu statistik deskriptif.

Dengan demikian, ditinjau dari jenis data yang akan dijangkau, penelitian ini oleh Bogdan dan Biklen (dalam Sugiyono, 2008) digolongkan ke dalam *qualitative research are concerned with process rather than simply with outcomes or products* yaitu penelitian kualitatif yang lebih menekankan pada proses yang datanya kualitatif, daripada hasil atau produk yang datanya kuantitatif.

B. Pemilihan Subjek Penelitian

Data yang telah diperoleh sekarang ini adalah hasil dari sekian upaya keras peneliti untuk mengumpulkannya. Mulai dari pemberian matakuliah sebanyak 5 kali pertemuan, pemilihan subjek, pelaksanaan wawancara hingga berakhirnya penelitian di kampus. Dalam upaya memilih subjek penelitian, peneliti terlebih dahulu menentukan lokasi penelitian. Dalam hal ini, lokasi penelitian yang dipilih adalah Universitas Muhammadiyah Makassar (Unismuh Makassar). Alasannya adalah karena peneliti adalah pengajar di Unismuh Makassar yang telah mengetahui sosio-kultural kampus dan mahasiswanya, sehingga dapat mempermudah pelaksanaan penelitian.

Jurusan pendidikan matematika Unismuh Makassar angkatan 2009 pada semester lima memiliki 6 kelas paralel, yaitu dari kelas V-A sampai V-F yang memprogramkan matakuliah Analisis Real I. Peneliti telah mengajar semua kelas tersebut dengan matakuliah yang berbeda-beda sejak semester I. Berdasarkan hasil observasi dan pengalaman mengajar di kelas-kelas tersebut, peneliti memutuskan untuk mengadakan penelitian di kelas V-D, karena peneliti sudah 3 kali mengajar di

kelas ini dengan matakuliah berbeda dan mengajar yang keempat kalinya di kelas ini dengan jadwal perkuliahan yang bertepatan dengan pelaksanaan penelitian. Sehingga, peneliti merasa sudah ada keakraban antara peneliti dan mahasiswa. Selain itu, peneliti juga sudah mengetahui karakteristik dan latar belakang sosial serta budaya mahasiswa.

Di kelas V-D inilah penelitian dilakukan sampai selesai. Secara keseluruhan banyaknya mahasiswa kelas V-D adalah 50 orang. Akan tetapi, yang berpartisipasi dalam penelitian hanya 47 orang. 3 siswa lainnya tidak dapat berpartisipasi karena 1 orang melahirkan, dan 2 lainnya tidak berpartisipasi karena sakit.

Skor hasil tes diagnostik mereka berdasarkan mata kuliah (1) Kalkulus, (2) Aljabar Elementer dan (3) Logika Matematika terklasifikasi dalam tiga kategori kemampuan sebagaimana disebutkan dalam Bab III, yaitu kemampuan tinggi, kemampuan sedang, dan kemampuan rendah. Namun peneliti hanya mengambil 2 kategori saja yaitu kemampuan tinggi dan kemampuan rendah untuk melihat kecenderungan tinggi atau rendah kemampuan mahasiswa dalam mata kuliah prasyarat yang dapat mempengaruhi proses pembelajaran dan berdampak pada pemahaman mahasiswa terhadap mata kuliah Analisis Real I.

Sesuai dengan Bab III pengambilan subjek dapat dilakukan dengan 8 kemungkinan pemilihan subjek. Berdasarkan data yang diperoleh, terdapat 32 (68.09%) orang yang memiliki skor rendah pada Aljabar Elementer, 5 (10.64%) orang yang memiliki skor sedang pada Aljabar Elementer, 10 (21,28%) orang yang memiliki skor sedang pada Aljabar Elementer; terdapat 47 (100%) sedangkan orang

yang mempunyai skor rendah pada matakuliah Logika Matematika, 5 (10,64%) orang yang memiliki skor sedang pada Aljabar Elementer, 10 (21,28%) orang yang memiliki skor sedang pada Aljabar Elementer; terdapat 47 (100%) orang skor rendah pada Logika Matematika dan 43 (91,49%) orang yang memiliki skor rendah pada Kalkulus I, 3 (6,38%) orang yang memiliki skor sedang pada Kalkulus I; terdapat 1 (2,13%) orang skor tinggi pada matakuliah Kalkulus.

Data selengkapnya tentang kriteria penentuan subjek penelitian yaitu sebagai berikut.

Tabel 3.1 Kriteria Penentuan Subjek Penelitian Melalui Tes Diagnostik Berdasarkan Kalkulus I, Aljabar Elementer dan Logika Matematika Mahasiswa Semester V Kelas V-D Unismuh Makassar

Subjek	Skor pada Kalkulus I	Skor pada Aljabar Elementer	Skor pada Logika Matematika
M ₁	Tinggi	Tinggi	Tinggi
M ₂	Tinggi	Tinggi	Rendah
M ₃	Tinggi	Rendah	Tinggi
M ₄	Tinggi	Rendah	Rendah
M ₅	Rendah	Tinggi	Tinggi
M ₆	Rendah	Tinggi	Rendah
M ₇	Rendah	Rendah	Tinggi
M ₈	Rendah	Rendah	Rendah

Keterangan:

- Kategori tinggi : skor 71- 100
- Kategori sedang : skor 51 - 70
- Kategori rendah : skor 0 – 50

Berdasarkan tabel di atas maka yang memenuhi kriteria penentuan subjek penelitian ada 3 yaitu M₃, M₄ dan M₈.

C. Subjek Penelitian

Setelah melalui seluruh rangkaian dalam proses pemilihan subjek penelitian, akhirnya peneliti dapat menjustifikasi 3 mahasiswa sebagai subjek penelitian. Penjustifikasian ini dilakukan setelah menyortir skor hasil tes diagnostik berdasarkan Aljabar Elementer, Logika Matematika dan Kalkulus I dan terpilihlah 3 jenis kriteria yaitu mahasiswa yang mendapatkan skor tinggi pada matakuliah Aljabar Elementer, skor rendah pada matakuliah Logika dan skor tinggi pada matakuliah Kalkulus, menunjuk ke AAY dimana jenis kriteria tersebut memang hanya 1 orang saja yang memenuhi, sedangkan khusus 2 jenis kriteria lainnya terdapat tiga mahasiswa yang memenuhi kriteria yaitu mendapatkan skor tinggi pada mata kuliah Aljabar Elementer, skor rendah pada matakuliah Logika dan skor rendah pada matakuliah Kalkulus dan terdapat 32 mahasiswa yang memenuhi kriteria mendapatkan skor rendah pada matakuliah Aljabar Elementer, skor rendah pada matakuliah Logika dan skor rendah pada matakuliah Kalkulus, sehingga untuk menentukan salah satu subjek di antara masing-masing mahasiswa pada jenis kriteria tersebut, peneliti menunjuk ke NHT yaitu mahasiswa yang mendapatkan skor tinggi pada matakuliah Aljabar Elementer, skor rendah pada matakuliah Logika dan skor rendah pada matakuliah Kalkulus dan menunjuk ke ASN yaitu mahasiswa yang mendapatkan skor rendah pada matakuliah Aljabar Elementer, skor rendah pada matakuliah Logika Matematika dan skor rendah pada matakuliah Kalkulus I, pemilihan subjek berdasarkan hasil pengamatan selama peneliti mengajar di kelas tersebut, peneliti memilih subjek tersebut karena dinilai kedua subjek ini mempunyai kehadiran di atas 80% pada mata

kuliah sebelumnya yang pernah peneliti ajarkan, kedua subjek tersebut kooperatif selama perkuliahan, kedua alasan ini sangat penting sebagai pertimbangan untuk memilih subjek tersebut diantara mahasiswa yang sama-sama berada pada kriteria tersebut demi kelancaran jalannya proses penelitian dan wawancara. Dengan demikian, subjek penelitian telah dipilih, di mana ketiganya adalah perempuan.

Mahasiswa yang terpilih sebagai subjek penelitian dapat disajikan seperti pada Tabel 3.2. Ketiga mahasiswa inilah yang diberikan tes uraian disertai wawancara pada materi sistem bilangan real sehingga diperoleh data penelitian. Untuk memudahkan penyajian data yang diperoleh dari ketiga subjek tersebut, peneliti melakukan pengkodean. Mahasiswa yang mendapatkan skor tinggi pada matakuliah Aljabar Elementer, skor rendah pada matakuliah Logika Matematika dan skor tinggi pada matakuliah Kalkulus disebut Subjek S1, mahasiswa yang mendapatkan skor tinggi pada matakuliah Aljabar Elementer, skor rendah pada matakuliah Logika Matematika dan skor rendah pada matakuliah Kalkulus disebut Subjek S2, dan mahasiswa yang mendapatkan skor rendah pada matakuliah Aljabar Elementer, skor rendah pada matakuliah Logika Matematika dan skor rendah pada matakuliah Kalkulus disebut Subjek S3.

Tabel 3.2 Subjek Penelitian

No	Nama	Kriteria berdasarkan Tes Diagnostik		
		Skor Aljabar Elementer	Skor Logika Matematika	Skor Kalkulus I
1	AAY	Tinggi	Rendah	Tinggi
2	NHT	Tinggi	Rendah	Rendah
3	ASN	Rendah	Rendah	Rendah

D. Prosedur Penelitian

Langkah-langkah yang ditempuh dalam pelaksanaan penelitian sebagai berikut:

1. Menyusun draf awal instrumen penelitian, perangkat pembelajaran, dan media pembelajaran yang akan digunakan. Instrumen meliputi (a) Tes Diagnostik berdasarkan Kalkulus I, (b) Tes Diagnostik berdasarkan Aljabar Elementer (c) Tes Diagnostik berdasarkan Logika Matematika (d) Lembar Observasi Aktivitas Mahasiswa, (e) Angket Respons Mahasiswa, (f) Tes Uraian, (g) Pedoman Wawancara, dan (h) Tes Hasil Belajar Analisis Real I. Perangkat pembelajaran meliputi (a) Satuan Acara Perkuliahan (SAP) (b) Latihan Mandiri dan (c) Latihan Lanjutan
2. Melakukan validasi instrumen dan perangkat pembelajaran yang disebutkan pada poin 1.

3. Memberikan tes diagnostik meliputi (a) Tes Diagnostik berdasarkan Kalkulus I, (b) Tes Diagnostik berdasarkan Logika Matematika, dan (c) Tes Diagnostik berdasarkan Aljabar Elementer sebelum kegiatan perkuliahan dilaksanakan.
4. Menentukan subjek penelitian berdasarkan poin 3.
5. Melaksanakan perkuliahan sebanyak 5 kali pertemuan dengan menggunakan perangkat-perangkat yang telah dipersiapkan sambil melakukan observasi terhadap subjek penelitian dengan menggunakan Lembar Observasi. Dosen melakukan perkuliahan dengan memperhatikan hal-hal sebagai berikut:
 - a. Penyajian materi pada setiap pertemuan senantiasa memperhatikan aspek-aspek hierarki belajar Gagne
 - b. Pada tiap pertemuan dosen memberikan bentuk-bentuk *scaffolding* yang disesuaikan dengan kebutuhan yakni pemberian *scaffolding* berdasarkan kendala atau kesulitan yang dihadapi mahasiswa dalam memahami materi perkuliahan (hal ini dapat dilihat pada setiap SAP yang telah dipersiapkan)
6. Memberikan Tes Uraian pada subjek penelitian sebelum wawancara, di mana soal-soal pada tes uraian akan ditanyakan kembali pada saat wawancara.
7. Melakukan wawancara terhadap subjek penelitian pada setiap selesai suatu pertemuan yang didasarkan pada hasil pekerjaan Tes Uraian yang telah diberikan (dilakukan di luar jam perkuliahan).
8. Mengedarkan Angket Respons Mahasiswa terhadap penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*.

9. Pada akhir materi perkuliahan, dilakukan tes hasil belajar untuk mengukur kemampuan memahami konsep, prinsip dan keterampilan mahasiswa pada materi sistem bilangan real.
10. Mengolah dan menganalisis data yang telah diperoleh.

E. Instrumen Penelitian dan Perangkat Pembelajaran

Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini, meliputi: (a) Tes Diagnostik berdasarkan matakuliah Kalkulus I terkait dengan konsep-konsep analisis-analisis (Sistem Bilangan Real); (b) Tes Diagnostik berdasarkan matakuliah Aljabar Elementer terkait dengan konsep-konsep analisis-analisis (Sistem Bilangan Real); (c) Tes Diagnostik berdasarkan matakuliah Logika Matematika terkait dengan konsep-konsep analisis-analisis (Sistem Bilangan Real); (d) Lembar Observasi Aktivitas Mahasiswa; (e) Angket Respons Mahasiswa; (f) Tes Uraian sebelum diadakan wawancara (f) Pedoman Wawancara; dan (g) Tes Hasil Belajar Analisis Real I. Sedangkan perangkat pembelajaran meliputi (a) Satuan Acara Perkuliahan (SAP), (b) Latihan Mandiri dan (c) Latihan Lanjutan. Adapun penjelasannya sebagai berikut:

1. Instrumen Penelitian

(a) Tes diagnostik

Tes diagnostik diberikan sebelum perkuliahan Analisis Real I berlangsung. Tes diagnostik digunakan untuk mengetahui kesulitan mahasiswa pada materi apa saja yang terkait materi Sistem Bilangan Real, untuk selanjutnya materi-materi yang

sulit bagi mahasiswa tersebut akan dijelaskan pada fase pertama yaitu memberikan informasi awal atau apersepsi sebelum masuk pada materi Sistem Bilangan Real sebagai pengaplikasian hierarki belajar Gagne. Ada beberapa Tes diagnostik yaitu:

(i) Tes Diagnostik Berdasarkan Kalkulus I

Tes diagnostik berdasarkan kalkulus I digunakan untuk mengetahui konsep dan prinsip pada kalkulus I yang belum dikuasai mahasiswa terkait dengan penguasaan konsep dan prinsip pada analisis real I karena mata kuliah kalkulus I sebagai salah satu matakuliah yang materinya banyak menjadi prasyarat matakuliah analisis real. Tes ini berbentuk uraian dan terdiri dari 5 item. Sebelum digunakan, tes ini melalui proses validasi isi. Hasil tes ini digunakan sebagai salah satu kriteria dalam menentukan subjek penelitian berdasarkan klasifikasi nilai mahasiswa kategori tinggi, sedang, dan rendah.

(ii) Tes Diagnostik Berdasarkan Aljabar Elementer

Tes diagnostik berdasarkan aljabar elementer digunakan untuk mengetahui konsep dan prinsip pada aljabar elementer yang belum dikuasai mahasiswa terkait dengan penguasaan konsep dan prinsip pada analisis real I karena mata kuliah aljabar elementer sebagai salah satu matakuliah yang materinya menjadi prasyarat mata kuliah analisis real I. Tes ini berbentuk uraian dan terdiri dari 20 item. Sebelum mahasiswa diberi tes, terlebih dahulu dilakukan validasi isi. Hasil tes ini digunakan sebagai salah satu kriteria dalam menentukan subjek penelitian berdasarkan klasifikasi nilai mahasiswa kategori tinggi, sedang, dan rendah.

(iii) Tes Diagnostik Berdasarkan Logika Matematika

Tes diagnostik berdasarkan Logika Matematika digunakan untuk mengetahui konsep dan prinsip pada Logika Matematika yang belum dikuasai mahasiswa terkait dengan penguasaan konsep dan prinsip pada Analisis Real I karena Logika Matematika menjadi prasyarat matakuliah Analisis Real I. Tes ini berbentuk uraian dan terdiri dari 2 item. Sebelum mahasiswa diberi tes, terlebih dahulu dilakukan validasi isi. Hasil tes ini digunakan sebagai salah satu kriteria dalam menentukan subjek penelitian berdasarkan klasifikasi nilai mahasiswa kategori tinggi, sedang dan rendah.

(b) Tes Hasil Belajar Sistem Bilangan Real

Tes hasil belajar sistem bilangan real dibuat untuk mengetahui pemahaman mahasiswa terhadap materi pada mata kuliah analisis real. Tes ini berbentuk uraian dan terdiri dari 8 item. Tes ini juga sebelum digunakan divalidasi baik secara teoritis (validitas isi dan validitas konstruk), maupun validitas empiris (diujicobakan pada kelas paralel pada Jurusan Pendidikan Matematika FKIP Unismuh Makassar).

Tes hasil belajar merupakan tes untuk mengetahui secara rinci kemampuan mahasiswa menyelesaikan soal dengan menggunakan langkah-langkah penyelesaian hierarki belajar Gagne. Pada tes hasil belajar, setiap soal mewakili indikator pencapaian sesuai dengan kompetensi dasar pada materi sistem bilangan real..

(c) Lembar Observasi Aktivitas Mahasiswa

Lembar observasi aktivitas mahasiswa digunakan untuk melihat aktivitas mahasiswa yang terkait penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* setting pengajaran langsung. Aspek-aspek yang termuat dalam lembar observasi aktivitas mahasiswa ini meliputi:

1. Mendengarkan atau memperhatikan tujuan perkuliahan yang disampaikan oleh dosen.
2. Memperhatikan informasi dan materi yang dijelaskan oleh dosen.
3. Mengerjakan latihan.
4. Mengajukan pertanyaan tentang materi yang dijelaskan.
5. Memberi jawaban lisan terhadap pertanyaan yang diberikan oleh dosen atau mahasiswa.
6. Menyelesaikan masalah atau latihan mandiri
7. Melakukan setiap instruksi yang diberikan oleh dosen tanpa adanya masalah karena tidak mengerti seperti: memperlihatkan sikap mengangguk-angguk, menulis dengan benar dan tidak mengeluh.
8. Merespon dengan baik bantuan yang diberikan oleh dosen tanpa adanya masalah karena tidak mengerti seperti: mengajukan pertanyaan, menyebut kata-kata: “oh ... sudah paham bu”, “ya... ya bu mengerti”, oh ... begitu”

9. Aktivitas lain yang tidak relevan dengan kegiatan perkuliahan, seperti: mengobrol, melamun, mengerjakan tugas mata kuliah lain, mendengarkan musik dll.

Pengamatan difokuskan pada subjek penelitian sejak dosen membuka/memulai sampai menutup/mengakhiri kegiatan perkuliahan.

(d) Angket Respons Mahasiswa

Angket Respons Mahasiswa terhadap penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* setting pengajaran langsung dibuat untuk memperoleh data tentang pendapat mahasiswa terhadap aspek-aspek perkuliahan berupa:

1. Respons mahasiswa terhadap materi perkuliahan.
2. Respons mahasiswa terhadap kegiatan mahasiswa dalam mengikuti perkuliahan.
3. Respons mahasiswa terhadap perangkat yang digunakan dalam perkuliahan.
4. Respons mahasiswa terhadap pelaksanaan perkuliahan secara umum.
5. Respon mahasiswa terhadap adanya pemberian *scaffolding*.
6. Respon mahasiswa terhadap penerapan hierarki belajar Gagne.
7. Respons mahasiswa terhadap penyajian perkuliahan yang diberikan oleh dosen.
8. Respons mahasiswa terhadap kemajuan yang mereka alami dengan diterapkannya hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*.

Cara atau teknik yang digunakan untuk memperoleh data tersebut adalah dengan memberikan angket kepada mahasiswa setelah pertemuan terakhir selesai untuk diisi sesuai petunjuk yang diberikan.

(e) Tes Uraian Materi Sistem Bilangan Real

Tes uraian adalah metode pengumpulan data secara tertulis untuk memperoleh deskripsi pemahaman konsep dan prinsip mahasiswa tentang materi sistem bilangan real yang mengacu pada penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* secara tertulis. Tes uraian ini diberikan kepada subjek penelitian di luar jam perkuliahan, pada penelitian ini. Jumlah soal pada tes uraian sebanyak 26 soal dengan rincian sebagai berikut:

- a. Materi jenis-jenis bilangan real sebanyak 12 soal
- b. Materi sifat aljabar pada bilangan real sebanyak 2 soal
- c. Materi pembuktian bilangan rasional sebanyak 1 soal
- d. Materi sifat urutan pada bilangan real sebanyak 2 soal dan
- e. Materi sifat kelengkapan pada bilangan real sebanyak 9 soal

(f) Pedoman Wawancara

Wawancara (*interview*) adalah metode pengumpulan data yang lain selain tes uraian yang mensyaratkan komunikasi langsung antara peneliti dan subjek penelitian. Dalam wawancara biasanya terjadi tanya jawab sepihak yang dilakukan secara sistematis berdasarkan tujuan penelitian. Dalam penelitian ini, wawancara dilakukan

untuk memperoleh deskripsi pemahaman konsep dan prinsip mahasiswa tentang sistem bilangan real yang mengacu pada penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*.

Wawancara dalam penelitian ini sifatnya semi-terstruktur atau terbuka. Pertanyaan wawancara tidak harus sama untuk setiap subjek. Wawancara ini dilakukan untuk mengungkap secara kualitatif pemahaman konsep dan prinsip sistem bilangan real. Teknik wawancara adalah setelah mahasiswa diberikan tes uraian tentang konsep dan prinsip sistem bilangan real pada waktu yang berbeda, selanjutnya mereka diwawancarai dengan soal yang sama yang telah diberikan pada tes uraian tertulis, dengan wawancara, peneliti dapat mengungkap apa yang dipikirkan oleh mahasiswa, dan bagaimana cara ia menyelesaikan soal dan membuktikannya.

Data yang diperoleh peneliti adalah tulisan dan kata-kata mahasiswa. Ketika subjek penelitian mengerjakan tes uraian yang diberikan, ada kemungkinan bahwa langkah-langkah subjek dalam mengerjakan soal tidak semuanya tampak dari penyelesaian yang dibuat, dan tidak semua yang ada dalam pikirannya tertulis pada lembar jawaban. Untuk memperoleh data yang lengkap, baik tulisan maupun kata-kata, wawancara didokumentasikan dengan menggunakan MP5 dan *digital camera*.

Pentingnya wawancara sebagai alat pengumpul data dalam penelitian ini, sehingga diperlukan langkah-langkah penyusunan pedoman wawancara. Langkah-langkah yang dimaksud adalah sebagai berikut.

1. Merancang pedoman wawancara untuk menggali pemahaman mahasiswa terhadap konsep dan prinsip pada sistem bilangan real. Adapun metode wawancara yang digunakan adalah wawancara semi-terstruktur.
2. Pedoman wawancara ini terlebih dahulu dikonsultasikan kepada validator yang telah berpengalaman guna melakukan validasi isi dan konstruk. Untuk instrumen yang berbentuk test, pengujian validasi isi dapat dilakukan dengan membandingkan antara isi instrumen dengan materi perkuliahan yang telah diajarkan, seorang dosen yang memberi ujian di luar pelajaran yang telah ditetapkan, berarti instrumen ujian tersebut tidak mempunyai validitas isi. Untuk menguji validitas konstruksi, digunakan pendapat ahli, dalam hal ini setelah instrumen dikonstruksi tentang aspek-aspek yang akan diukur berdasarkan teori tertentu dalam penelitian apakah instrumen tersebut menerapkan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*
3. Melakukan perbaikan (revisi) jika ada yang perlu diperbaiki dari instrumen tersebut.
4. Mendiskusikan hasil validasi dari para ahli.
5. Pedoman wawancara yang layak digunakan.

2. Perangkat Pembelajaran

a) Satuan Acara Perkuliahan (SAP)

Satuan acara perkuliahan yang disusun didasarkan terutama pada komponen sintaks Model pengajaran langsung dengan menerapkan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*. Satuan acara perkuliahan ini merupakan persiapan dosen melaksanakan pengajaran untuk tiap pertemuan dan berfungsi sebagai acuan untuk melaksanakan proses pengajaran di kelas. Komponen utama SAP yang disusun yaitu (1) deskripsi mata kuliah, (2) standar kompetensi, (3) kompetensi dasar, (4) indikator pencapaian hasil belajar, (5) model pembelajaran dan metode pembelajaran (6) kegiatan pembelajaran dan (7) penilaian. Perlu ditekankan bahwa kegiatan pembelajaran Model pengajaran langsung yang disusun, juga menggunakan prinsip “pembelajaran berpusat pada guru/dosen (teacher oriented) dan process oriented” dengan dukungan aspek-aspek hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*. Dengan perkataan lain, pengajaran yang menekankan pada pentingnya penguasaan materi-materi/pengetahuan prasyarat, sebelum mempelajari suatu materi tertentu diawali dengan pendeteksian materi prasyarat yang dibutuhkan (mendukung materi tersebut) kemudian membenahi materi-materi prasyarat tadi, selain itu pengajaran ini juga memasukkan aspek pemberian bantuan yang dibutuhkan mahasiswa sesuai dengan tingkat kebutuhan mahasiswa untuk mengatasi kesulitan yang dialami, namun bantuan tersebut diberikan pada tahap-tahap awal pembelajaran, dikurangi atau

bahkan dihentikan ketika mahasiswa sudah mampu melanjutkan tugas yang diberikan dosen secara mandiri.

b) Latihan Mandiri

Latihan mandiri diberikan setelah perkuliahan pada setiap pertemuan. Latihan mandiri ini bertujuan untuk mengetahui sejauh mana pemahaman mahasiswa setelah mengikuti setiap pertemuan. Tugas mandiri ini dapat menjadi acuan untuk membenahi materi apa saja yang belum dikuasai oleh mahasiswa.

c) Latihan Lanjutan

Latihan lanjutan diberikan untuk dikerjakan di rumah dan dikumpul sebelum pertemuan selanjutnya. Latihan lanjutan ini bertujuan untuk melatih kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan masalah-masalah pembuktian yang menyangkut konsep dan prinsip pada materi sistem bilangan real. Latihan lanjutan mempunyai tingkat kesulitan lebih tinggi dibandingkan dengan latihan mandiri.

F. Teknik Analisis Data

Analisis data diartikan sebagai upaya mengolah data menjadi informasi, sehingga karakteristik atau sifat-sifat data tersebut dapat dengan mudah dipahami dan bermanfaat untuk menjawab masalah-masalah yang berkaitan dengan kegiatan penelitian. Dengan demikian, teknik analisis data dapat diartikan sebagai cara melaksanakan analisis terhadap data, dengan tujuan mengolah data tersebut menjadi

informasi, sehingga karakteristik atau sifat-sifat datanya dapat dengan mudah dipahami dan bermanfaat untuk menjawab masalah-masalah yang berkaitan dengan kegiatan penelitian, baik berkaitan dengan deskripsi data maupun untuk membuat induksi, atau menarik kesimpulan tentang karakteristik populasi (parameter) berdasarkan data yang diperoleh dari sampel (statistik).

Teknik analisis data yang diterapkan dalam penelitian ini adalah Teknik Analisis Kuantitatif dan Kualitatif.

1. Teknik Analisis Kuantitatif

Teknik analisis kuantitatif yang digunakan adalah analisis statistik deskriptif yang berfungsi untuk mendeskripsikan atau memberikan gambaran terhadap obyek yang diteliti melalui data sampel atau populasi sebagaimana adanya, tanpa melakukan analisis dan membuat kesimpulan yang berlaku untuk umum. (Sugiyono, 2011: 29).

Hasil penelitian yang dianalisis secara deskriptif adalah hasil belajar analisis real I, aktivitas mahasiswa dan respon mahasiswa. Ketiga aspek tersebut dalam penerapan hierarki belajar dan pemberian *scaffolding* setting pengajaran langsung dianalisis dengan teknik sebagai berikut:

- a. Hasil Belajar Mahasiswa. Data hasil belajar mahasiswa yang telah dikumpulkan dengan menggunakan instrumen di atas, selanjutnya dianalisis dengan menggunakan teknik statistik deskriptif. Statistik deskriptif digunakan untuk menjawab deskripsi hasil belajar mahasiswa. Teknik ini menggunakan (1)

mean, modus, dan median (2) ukuran dispersi, yaitu: range, simpangan baku, ragam, dan koefisien variasi, dan (3) tabel distribusi frekuensi, baik frekuensi absolut maupun frekuensi relatif atau persentase..

- b. Aktivitas mahasiswa. Data hasil observasi aktivitas mahasiswa selama perkuliahan berlangsung dianalisis dan dideskripsikan. Untuk mencari rata-rata frekuensi dan rata-rata persentase waktu yang digunakan mahasiswa melakukan aktivitas selama perkuliahan ditentukan melalui langkah-langkah berikut: (1) hasil pengamatan aktivitas mahasiswa untuk setiap indikator dalam satu kali pertemuan ditentukan frekuensinya dan dicari rata-rata frekuensi dari dua orang observer. Kemudian ditentukan frekuensi rata-rata dari rata-rata frekuensi untuk beberapa kali pertemuan, (2) mencari persentase frekuensi setiap indikator dengan cara membagi besarnya frekuensi dengan jumlah frekuensi untuk semua indikator. Kemudian hasil pembagian dikalikan dengan 100%. Selanjutnya dicari rata-rata persentase waktu untuk beberapa kali pertemuan dan dimasukkan dalam tabel rata-rata persentase.

Tabel 3.4 Kriteria Batasan Waktu Ideal Aktivitas Siswa

No	Kategori Aktivitas mahasiswa	Alokasi Waktu pada SAP					Jumlah	Waktu Ideal	Interval Toleransi PWI (%)
		I	II	III	IV	V			
1	Mendengarkan atau memperhatikan tujuan perkuliahan yang disampaikan oleh dosen	10	10	10	10	10	50	7,41% dari WT	2,41 -12,41
2.	Memperhatikan informasi dan materi yang dijelaskan oleh dosen	30	30	30	30	30	150	22,22% dari WT	17,22 – 27,22
3.	Mengerjakan Latihan	20	20	20	20	20	100	14,81 % dari WT	9,81 – 19,81
4	Mengajukan pertanyaan tentang materi yang telah dijelaskan	5	5	5	5	5	25	3,7% dari WT	0 – 3,7
5.	memberi jawaban lisan terhadap pertanyaan yang diberikan oleh dosen atau teman mahasiswa yang lain.	10	10	10	10	10	50	7,41 % dari WT	2,41 -12,41
6	Menyelesaikan masalah atau latihan mandiri,	25	25	25	25	25	125	18,52% dari WT	13,52 – 23,52
7	Melakukan setiap instruksi yang diberikan oleh dosen tanpa adanya masalah karena tidak mengerti seperti: memperlihatkan sikap mengangguk-angguk, menulis dengan benar dan tidak mengeluh.	20	20	20	20	20	100	14,81 % dari WT	9,81 – 19,81

8	Merespon dengan baik bantuan yang diberikan oleh dosen seperti: mengajukan pertanyaan, menyebut kata-kata: “oh ... sudah paham bu”, ya ... ya bu mengerti, “oh begitu”	10	10	10	10	10	50	7,41% dari WT	2,41 -12,41
9	Aktivitas lain yang tidak relevan dengan kegiatan perkuliahan.	5	5	5	5	5	25	3,7% dari WT	0 – 3,7
Jumlah		135	135	135	135	135	675	100%	

Keterangan:

- PWI adalah Persentase Waktu Indikator
- WT adalah waktu tersedia pada setiap pertemuan

Data hasil pengamatan aktivitas mahasiswa selama perkuliahan dianalisis sebagai berikut:

$$P_{Tm} = \frac{\sum T_m}{\sum T} \times 100\%$$

P_{Tm} = persentase aktivitas mahasiswa untuk melakukan suatu jenis aktivitas tertentu.

$\sum T_m$ = jumlah aktivitas tertentu yang dilakukan mahasiswa setiap pertemuan

$\sum T$ = jumlah seluruh aktivitas setiap pertemuan

Kemudian persentase aktivitas mahasiswa tersebut dibandingkan dengan “Interval Toleransi (PWI)” yang diperoleh dari persentase waktu ideal dengan menggunakan toleransi 5%.

Persentase waktu ideal mahasiswa dalam melakukan aktivitas tertentu, dihitung berdasarkan persentase jumlah alokasi waktu dari SAP pada aktivitas tertentu terhadap jumlah waktu seluruh SAP, yang rumusnya sebagai berikut:

$$P_{wi} = \frac{\sum wa}{\sum w} \times 100\%$$

P_{wi} = persentase waktu ideal untuk melakukan suatu jenis aktivitas tertentu.

$\sum wa$ = jumlah alokasi waktu dari semua SAP pada aktivitas tertentu

$\sum w$ = jumlah alokasi waktu dari semua SAP

- c. Respon mahasiswa. Untuk menganalisis data respon mahasiswa terhadap penerapan teori hierarki belajar Gagne setting pengajaran langsung, maka peneliti melakukan langkah-langkah sebagai berikut: (1) menghitung banyaknya siswa yang memberi respon positif sesuai dengan aspek yang ditanyakan, (2) melakukan perhitungan persentase dari banyaknya mahasiswa yang memberikan respon positif, (3) mencocokkan hasil persentase dengan kriteria yang ditetapkan dalam menentukan kategori untuk respon positif mahasiswa, (4) melakukan revisi terhadap perangkat yang sedang dikembangkan apabila hasil analisis menunjukkan respon mahasiswa belum positif.

Berdasarkan Muhammad Darwis (2007: 128) bahwa kriteria yang ditetapkan untuk menyatakan bahwa para mahasiswa memiliki respon positif terhadap penerapan teori hierarki belajar Gagne setting Pembelajaran langsung pada perkuliahan Analisis Real adalah lebih dari 50% dari memberi respon positif terhadap minimal 70%

jumlah aspek yang ditanyakan. Banyaknya siswa yang memberikan respon pada setiap kategori yang ditanyakan dalam lembar angket terhadap setiap mahasiswa yang dirumuskan sebagai berikut:

$$Pr = \frac{\sum Rm}{\sum M} \times 100\%$$

Keterangan:

Pr = persentase banyaknya mahasiswa yang memberikan respon terhadap kategori tertentu yang dinyatakan dalam angket.

$\sum Rm$ = banyaknya mahasiswa yang memberikan respon terhadap kategori tertentu yang dinyatakan dalam angket.

$\sum M$ = seluruh mahasiswa pada kelas V-D

2. Teknik Analisis Kualitatif

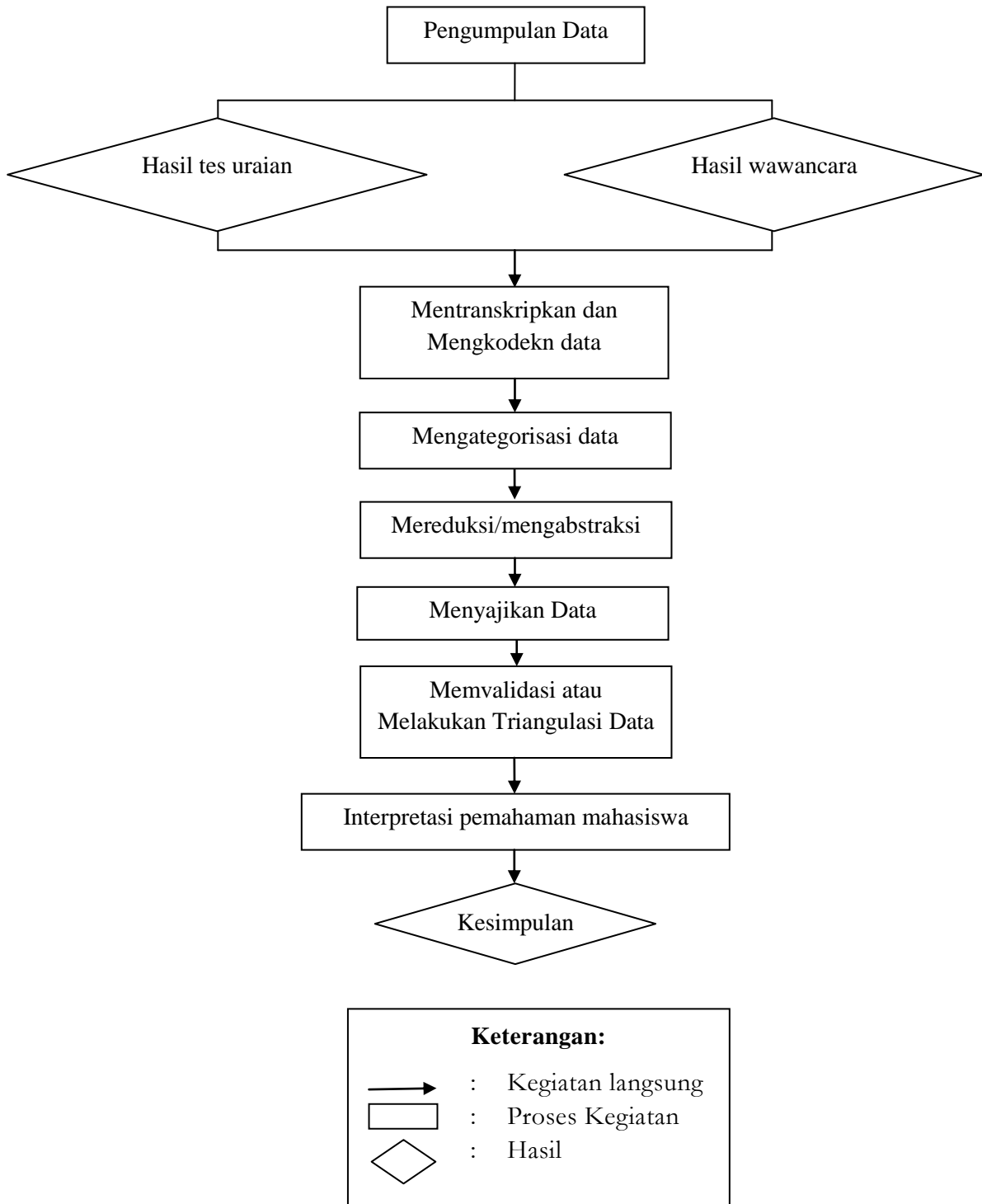
Analisis data tentang pemahaman konsep dan prinsip matematika dalam mata kuliah analisis real I yang diperoleh melalui wawancara dilakukan dengan mengikuti langkah-langkah berikut.

1. Mentranskripkan dan mengkodekan. Data yang telah dikumpulkan berupa rekaman wawancara selanjutnya ditranskripkan secara lengkap dan utuh sebagaimana adanya yang diperoleh dari lapangan. Kemudian, data dikodekan. Tujuannya adalah agar memudahkan kita dalam menempatkan data dalam kerangka pembahasan hasil penelitian.

2. Mengkategorisasikan data. Setelah mentranskripsikan dan mengkodekan, selanjutnya data dikategorisasikan atau dikelompokkan menjadi 3 kriteria subjek penelitian yaitu: S1, S2 dan S3
3. Mereduksi data.
4. Menyajikan data. Dalam hal ini, menyajikan data yang telah direduksi.
5. Memvalidasi atau melakukan triangulasi metode. Triangulasi metode adalah usaha mengecek keabsahan data atau mengecek keabsahan temuan penelitian. Triangulasi metode dapat dilakukan dengan menggunakan lebih dari satu teknik pengumpulan data untuk mendapatkan data yang sama. Pelaksanaannya dapat juga dengan cara cek dan recek. Pada penelitian ini peneliti menggunakan triangulasi metode untuk mengecek keabsahan data. Adapun metode yang dipakai dalam penelitian ini adalah:
 - a. Metode dengan pemberian tes uraian
Metode dengan pemberian tes uraian untuk mengetahui pemahaman mahasiswa terhadap materi sistem bilangan real melalui tulisan.
 - b. Metode wawancara
6. Menginterpretasikan pemahaman mahasiswa.
7. Menarik simpulan. Dalam hal ini, peneliti menarik simpulan berdasarkan hasil interpretasi data.

Dalam Gambar 3.1 di bawah ini, dapat dilihat bahwa teknik analisis data dengan langkah-langkah seperti yang disebutkan di atas.

Gambar 3.1 Analisis Data



HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Hasil Penelitian

Seperti yang telah dikemukakan pada bab III, bahwa jenis penelitian ini adalah *mixed qualitative-quantitative method* (penelitian gabungan kualitatif-kuantitatif) yang dominan tergolong penelitian deskriptif kualitatif dan eksploratif. Penelitian ini dilakukan untuk mendeskripsikan respon, aktivitas, hasil belajar, serta jenis pemahaman mahasiswa terhadap perkuliahan analisis real I yang menerapkan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* setting pengajaran langsung secara kualitatif. Adapun hasil pendeskripsian yang didapatkan di lapangan adalah sebagai berikut:

1. Hasil Analisis Deskriptif Kuantitatif

a) Deskripsi Respons Mahasiswa kelas V-D Unismuh Makassar dalam Perkuliahan Analisis Real I

Instrumen yang digunakan untuk memperoleh data respons mahasiswa adalah angket respons mahasiswa. Angket ini diberikan kepada mahasiswa setelah mengikuti kegiatan pembelajaran dengan menerapkan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* pada mata kuliah analisis real I untuk diisi menurut perasaan dan pendapat mahasiswa terhadap suasana pembelajaran, pelaksanaan pembelajaran dengan menerapkan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*, dan perangkat pembelajaran. Angket ini seharusnya diisi oleh 47 mahasiswa, namun pada saat pemberian angket, 1 orang mahasiswa tidak menghadiri perkuliahan sehingga jumlah mahasiswa yang mengisi angket re 89 mahasiswa sebanyak 46 orang.

Untuk mengetahui lebih mendalam tentang respons mahasiswa baik positif maupun negatif dari pertemuan pertama sampai kelima, dapat dideskripsikan pada tabel 4.1 sebagai berikut:

Tabel 4.1 Deskripsi hasil respons mahasiswa terhadap pelaksanaan perkuliahan

No	Uraian	Respons	
		Menyenangkan	Tidak Menyenangkan
1.	<i>Suasana belajar dikelas</i>	82.61	17.39
		Setuju	Tidak Setuju
2.	<i>Dosen menjelaskan materi-materi prasyarat tertentu yang dibutuhkan mahasiswa</i>	97.83	2.17
3.	<i>Pemberian bantuan oleh dosen baik secara individu maupun klasikal, apabila mahasiswa mengalami kesulitan</i>	97.83	2.17
4.	<i>Pemberian latihan mandiri oleh dosen di kelas</i>	97.83	2.17
5.	<i>Pemberian tugas-tugas yang diberikan oleh dosen untuk diselesaikan di rumah</i>	97.83	2.17
		Ya	Tidak
6.	<i>Saya mengalami kemajuan setelah mengikuti perkuliahan</i>	89.13	11.87
7.	<i>Saya merasa termotivasi untuk lebih giat belajar setelah mengikuti perkuliahan</i>	86.96	13.04
8.	<i>Setujukah Anda bila cara perkuliahan seperti ini diterapkan?</i>	80.43	19.57

Berdasarkan tabel 4.1 terlihat bahwa hasil analisis data respons mahasiswa terhadap pelaksanaan perkuliahan untuk materi sistem bilangan real menunjukkan bahwa mahasiswa memiliki respons positif terhadap penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* setting pengajaran langsung adalah lebih dari 50% mahasiswa yaitu (97,83%) atau sebanyak 45 orang dari 46 mahasiswa yang memberi respons positif terhadap minimal 70% jumlah aspek yang ditanyakan.

b) Deskripsi Aktivitas Mahasiswa kelas V-D Unismuh Makassar pada Mata Kuliah Analisis Real I dengan Penerapan Hierarki Belajar Gagne dan Pemberian *Scaffolding* Setting Pengajaran Langsung

Pengamatan terhadap aktivitas mahasiswa selama kegiatan perkuliahan menggunakan lembar observasi aktivitas mahasiswa, setiap 5 menit pengamat mengamati aktivitas mahasiswa yang dominan termasuk di dalamnya pengamat menuliskan hasil pengamatannya. Pengamatan difokuskan pada 3 subjek penelitian dilakukan sejak dimulai hingga akhir kegiatan perkuliahan. Hasil pengamatan terhadap aktivitas mahasiswa dalam perkuliahan setiap kali pertemuan selama lima kali tatap muka dinyatakan dengan persentase. Hasil tersebut secara ringkas disajikan dalam Tabel 4.2 , sedangkan secara terperinci dapat dilihat dalam Lampiran

Tabel 4.2 Aktivitas Mahasiswa Selama Kegiatan Perkuliahan

No	Aspek pengamatan aktivitas	Persentase aktivitas mahasiswa pada pertemuan ke -					Rata-rata	Rentang baik (%)
		I	II	III	IV	V		
1	Memperhatikan petunjuk/arahan (informasi awal) dalam mengikuti perkuliahan	7,41	7,41	6,17	6,17	6,17	6.67	2.41 - 12.41
2.	Memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen	23.46	18,52	19.75	18,52	19,75	20.00	17,22 - 27,22
3.	Mengerjakan latihan	12.35	14,81	12.35	11,11	12,35	12.59	9,81 - 19,81
4.	Mengajukan pertanyaan tentang materi yang telah dijelaskan	2.47	4,94	3.70	7,41	3,70	4.44	0 - 3,70
5.	Memberi jawaban lisan terhadap pertanyaan yang diberikan dosen atau teman mahasiswa.	6.17	3,70	11.11	6,17	11,11	7.65	2,41 - 12,41
6	Menyelesaikan masalah/tugas mandiri	17.28	16,05	22.22	17,28	22,22	19.01	13,52-23,52
7	Melakukan setiap instruksi yang diberikan oleh dosen tanpa adanya masalah karena tidak mengerti seperti: memperlihatkan sikap mengangguk-angguk, menulis dengan benar dan tidak mengeluh	14.81	18,52	11.11	14,81	8,64	13.58	9,81-19,81
8	Merespon dengan baik bantuan yang diberikan oleh dosen seperti: mengajukan pertanyaan, menyebut kata-kata: “oh.... sudah	12.35	12,35	11.11	14.81	11,11	12.35	2,41- 12,41

	paham bu”, “ya...ya bu mengerti”, “ohbegitu”							
9	Aktivitas lain yang tidak relevan dengan kegiatan perkuliahan, seperti: mengobrol, melamun, mengerjakan tugas mata kuliah lain, mendengarkan musik dll.	3.70	3,70	2,47	3,70	4,94	3.70	0 - 3.70

Selama kegiatan perkuliahan dengan menerapkan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*, dosen sebagai pemberi informasi memainkan peranan pusat dalam perkuliahan ini namun pemberian bimbingan (*scaffolding*) yang diberikan dosen kepada mahasiswa secara berangsur-angsur berkurang, untuk meningkatkan kemandirian dalam belajar dosen memberikan latihan dan latihan lanjutan sehingga membuat aktivitas perkuliahan mahasiswa di kelas lebih aktif.

Secara umum hasil analisis data aktivitas mahasiswa menunjukkan bahwa aspek kegiatan ke-1, ke-2, ke-3, ke-5, ke-6, dan ke-8 pada setiap pertemuan berada pada rentang batas waktu toleransi, sedangkan aspek ke-4 pada pertemuan ke-2 (4,94%), aspek ke-4 pada pertemuan ke-4 (7,41%), aspek ke-7 pada pertemuan ke-5 (8,64%), aspek ke-8 pada pertemuan ke-4 (14,81%) dan aspek ke-9 pada pertemuan ke-5 (4,94%) berada di luar batas toleransi. Hasil pengamatan untuk pertemuan ke-2 pada aspek ke-4, pertemuan ke-4 pada aspek ke-4 (mengajukan pertanyaan tentang materi yang telah dijelaskan) dan pertemuan ke-4 pada aspek ke-8 (merespon dengan

baik bantuan yang diberikan oleh dosen) untuk aktivitas mahasiswa lebih dari batas toleransi, hal ini disebabkan karena mahasiswa banyak mendapat banyak kesulitan untuk memahami teorema dan menyelesaikan masalah – masalah pembuktian pada sifat aljabar dan sifat urutan pada bilangan real. Sedangkan pertemuan ke-5 pada aspek ke-7 (melakukan setiap instruksi yang diberikan oleh dosen tanpa adanya masalah karena tidak mengerti seperti: memperlihatkan sikap mengangguk-angguk, menulis dengan benar dan tidak mengeluh) kurang dari batas toleransi, hal ini disebabkan karena mahasiswa berada pada situasi kesulitan dalam memahami aturan, prinsip dan konsep-konsep terdefinisi dan aspek ke-9 (aktivitas lain yang tidak relevan dengan kegiatan perkuliahan, seperti: mengobrol, melamun, mengerjakan tugas mata kuliah lain, mendengarkan musik dll) untuk aktivitas mahasiswa lebih dari batas toleransi, hal ini disebabkan karena imbas dari kesulitan dalam memahami materi, sehingga mahasiswa cenderung melakukan hal-hal di luar kegiatan perkuliahan.

Menurut tabel 4.2 di atas, diperoleh bahwa rata-rata persentase aktivitas mahasiswa dari pertemuan pertama sampai kelima telah memenuhi kriteria waktu ideal. Hal ini menunjukkan bahwa secara umum dari pertemuan pertama sampai pertemuan kelima, ketiga mahasiswa yang diobservasi telah melaksanakan aktivitas dalam penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* setting pengajaran langsung sesuai dengan yang diharapkan.

Berdasarkan data aktivitas mahasiswa yang telah dipaparkan, rata-rata persentase aktivitas mahasiswa yang dilakukan dapat memenuhi kriteria waktu ideal aktivitas yang dilakukan dapat memenuhi kriteria waktu ideal aktivitas mahasiswa pada bab III.

c) Hasil Analisis Deskriptif Kelas

Hasil analisis statistik deskriptif yang berkaitan dengan kemampuan aljabar elementer, logika matematika, kalkulus I, dan tes hasil belajar analisis real I mahasiswa diperoleh dengan menggunakan fasilitas analisis data dalam microsoft office excel 2007. Hasil analisis tersebut dapat disajikan sebagai berikut:

• Aljabar Elementer

Tabel 4.3 Statistik Deskriptif untuk Skor Aljabar Elementer

Aljabar Elementer	
Mean	41,01595745
Standard Error	3,060373884
Median	41,75
Mode	26
Standard Deviation	20,9808663
Sample Variance	440,1967507
Kurtosis	-0,933077085
Skewness	-0,045784458
Range	76,75
Minimum	1,25
Maximum	78
Sum	1927,75
Count	47

Keterangan:

- Kemampuan Rendah : 0 – 50
- Kemampuan Sedang : 51 – 70
- Kemampuan Tinggi : 71 – 100

Mean sebesar 41,02 menunjukkan bahwa kemampuan mahasiswa dalam mata kuliah aljabar elementer termasuk dalam kualifikasi “rendah”. Median sebesar 41,75

menunjukkan bahwa ada 50% mahasiswa yang memperoleh skor aljabar elementer paling rendah 41,75 atau 50% paling tinggi 41,75.

Ukuran penyebaran meliputi deviasi standar, ragam, range, dan koefisien variasi. Sebaran yang memiliki skor relatif kecil memberikan indikasi bahwa data kemampuan aljabar elementer mahasiswa cenderung menyebar secara homogen. Koefisien kemencengan (*skewness*) sebesar -0,04 (bertanda negatif) menunjukkan bahwa mahasiswa yang memperoleh skor aljabar elementer di bawah mean lebih sedikit daripada di atas mean. Namun demikian, koefisien -0,01 menunjukkan bahwa mahasiswa yang memperoleh skor aljabar elementer di bawah mean hampir sama dengan yang di atas mean.

Sebaran frekuensi skor aljabar elementer mahasiswa yang menjadi responden dalam penelitian ini dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 4.4 Sebaran Frekuensi Skor Aljabar Elementer

Skor Aljabar Elementer	Kualifikasi	Frekuensi	Persentase
0 – 50	Rendah	32	68
51 – 70	Sedang	10	21
71 – 100	Tinggi	5	11
Jumlah	-	47	100

Dari tabel di atas disimpulkan bahwa frekuensi terbesar skor aljabar elementer mahasiswa berada dalam kualifikasi “rendah”. Jumlah mahasiswa yang memiliki skor aljabar elementer rendah 32 orang (68%), sedang 10 orang (21%), dan tinggi 5 orang (11%).

- **Logika Matematika**

Tabel 4.5 Statistik Deskriptif untuk Skor Logika Matematika

Logika Matematika	
Mean	5,255319149
Standard Error	1,130568482
Median	0
Mode	0
Standard Deviation	7,750787015
Sample Variance	60,07469935
Kurtosis	4,787291294
Skewness	2,081717459
Range	32,5
Minimum	0
Maximum	32,5
Sum	247
Count	47

Keterangan:

- Kemampuan Rendah : 0 – 50
- Kemampuan Sedang : 51 – 70
- Kemampuan Tinggi : 71 – 100

Mean sebesar 5,25 menunjukkan bahwa kemampuan mahasiswa dalam mata kuliah Logika termasuk dalam kualifikasi “rendah”. Median sebesar 0 menunjukkan bahwa ada 50% mahasiswa yang memperoleh skor Logika paling rendah 0 atau 50% paling tinggi 0.

Ukuran penyebaran meliputi deviasi standar, ragam, range, dan koefisien variasi. Sebaran yang memiliki skor relatif kecil memberikan indikasi bahwa data kemampuan logika mahasiswa cenderung menyebar secara homogen. Koefisien kemencengan (*skewness*) sebesar 2,08 (bertanda positif) menunjukkan bahwa mahasiswa yang memperoleh skor Logika di bawah mean lebih banyak daripada di atas mean.

Sebaran frekuensi skor Logika mahasiswa yang menjadi responden dalam penelitian ini dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 4.6 Sebaran Frekuensi Skor Logika

Skor Logika	Kualifikasi	Frekuensi	Persentase
0 – 50	Rendah	47	100
51 – 70	Sedang	0	0
71 – 100	Tinggi	0	0
Jumlah	-	47	100

Dari tabel di atas disimpulkan bahwa frekuensi skor logika semua mahasiswa (100%) berada dalam kualifikasi “rendah”.

• **Kalkulus I**

Tabel 4.7 Statistik Deskriptif untuk Skor Kalkulus I

Kalkulus	
Mean	26,18085106
Standard Error	2,262565158
Median	23,5
Mode	23,5
Standard Deviation	15,51136523
Sample Variance	240,6024514
Kurtosis	0,970540876
Skewness	0,818872196
Range	74
Minimum	0
Maximum	74
Sum	1230,5
Count	47

Keterangan:

- Kemampuan Rendah : 0 – 50
- Kemampuan Sedang : 51 – 70
- Kemampuan Tinggi : 71 – 100

Mean sebesar 26,18 menunjukkan bahwa kemampuan mahasiswa dalam mata kuliah kalkulus I termasuk dalam kualifikasi “rendah”. Median sebesar 23,5 menunjukkan bahwa ada 50% mahasiswa yang memperoleh skor kalkulus I paling rendah 23,5 atau 50% paling tinggi 23,5.

Ukuran penyebaran meliputi deviasi standar, ragam, range, dan koefisien variasi. Sebaran yang memiliki skor relatif kecil memberikan indikasi bahwa data kemampuan kalkulus I mahasiswa cenderung menyebar secara homogen. Koefisien kemencengan (*skewness*) sebesar 0,81 (bertanda positif) menunjukkan bahwa mahasiswa yang memperoleh skor kalkulus I di bawah mean sedikit lebih banyak daripada di atas mean.

Sebaran frekuensi skor kalkulus I mahasiswa yang menjadi responden dalam penelitian ini dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 4.8 Sebaran Frekuensi Skor Kalkulus I

Skor Kalkulus	Kualifikasi	Frekuensi	Persentase
0 – 50	Rendah	43	92
51 – 70	Sedang	3	6
71 – 100	Tinggi	1	2
Jumlah	-	47	100

Dari tabel di atas disimpulkan bahwa frekuensi terbesar skor Kalkulus I mahasiswa berada dalam kualifikasi “rendah”. Jumlah mahasiswa yang memiliki skor Kalkulus I rendah 43 orang (92%), sedang 3 orang (6%), dan tinggi 1 orang (2%).

- **Hasil Belajar Analisis Real I Pada Topik Sistem Bilangan Real**

Tabel 4.9 Statistik Deskriptif untuk Skor Hasil Belajar

Hasil Belajar	
Mean	34,31914894
Standard Error	2,049933187
Median	34,5
Mode	41,5
Standard Deviation	14,05363388
Sample Variance	197,5046253
Kurtosis	-0,156266385
Skewness	0,274293848
Range	61,5
Minimum	10
Maximum	71,5
Sum	1613
Count	47

Keterangan:

- Kemampuan Rendah : 0 – 50
- Kemampuan Sedang : 51 – 70
- Kemampuan Tinggi : 71 – 100

Mean sebesar 34,32 menunjukkan bahwa hasil belajar Analisis Real I pada materi sistem bilangan real mahasiswa termasuk dalam kualifikasi “rendah”. Median sebesar 34,5 menunjukkan bahwa ada 50% mahasiswa yang memperoleh skor Analisis Real I pada materi Sistem Bilangan Real paling rendah 34,5 atau 50% paling tinggi 34,5.

Ukuran penyebaran meliputi deviasi standar, ragam, range, dan koefisien variasi. Sebaran yang memiliki skor relatif kecil memberikan indikasi bahwa data kemampuan Kalkulus Imahasiswa cenderung menyebar secara homogen. Koefisien kemencengan (*skewness*) sebesar 0,27 (bertanda positif) menunjukkan bahwa

mahasiswa yang memperoleh skor hasil belajar di bawah mean lebih banyak daripada di atas mean.

Sebaran frekuensi skor hasil belajar mahasiswa yang menjadi responden dalam penelitian ini dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 4.10 Sebaran Frekuensi Skor Analisis Real I (Sistem Bilangan Real)

Skor Kalkulus	Kualifikasi	Frekuensi	Persentase
0 – 50	Rendah	43	92
51 – 70	Sedang	3	6
71 – 100	Tinggi	1	2
Jumlah	-	47	100

Dari tabel di atas disimpulkan bahwa frekuensi terbesar skor Analisis Real I pada materi Sistem Bilangan Real mahasiswa berada dalam kualifikasi “rendah”. Jumlah mahasiswa yang memiliki skor Analisis Real I pada materi Sistem Bilangan Real rendah 43 orang (92%), sedang 3 orang (6%), dan tinggi 1 orang (2%).

2. Hasil Analisis Deskriptif Kualitatif

Data didapatkan dengan 2 cara yaitu dengan pemberian tes uraian dan wawancara terhadap 3 subjek penelitian. Subjek penelitian ini didapatkan melalui kriteria penentuan subjek penelitian melalui tes diagnostik berdasarkan Aljabar Elementer, Logika Matematika dan Kalkulus II,. Berdasarkan metode penelitian yang ditulis pada bab III, terpilihlah 3 subjek penelitian.

Untuk mengumpulkan data yang sama maka diberikan soal yang sama dengan metode yang berbeda. Metode pertama subjek penelitian diberikan tes uraian sebanyak 26 soal untuk dikerjakan secara tertulis, tes tersebut dilakukan di luar jam

perkuliahan dan metode kedua, peneliti melakukan wawancara terhadap subjek penelitian dengan soal yang telah dikerjakan sebelumnya pada tes uraian, wawancara sangat berguna untuk mengungkap pemahaman mahasiswa yang tidak didapatkan pada saat pemberian tes, wawancara juga digunakan untuk mengecek keabsahan data apakah jawaban mahasiswa pada saat tes konsisten dengan jawaban mahasiswa pada saat wawancara selain itu dengan wawancara mahasiswa dapat mengklarifikasi jawaban yang salah pada saat tes, namun dengan alasan yang logis. Wawancara yang awalnya direncanakan setiap akhir perkuliahan tidak dapat dilakukan karena beberapa jadwal wawancara beririsan dengan kegiatan mahasiswa yang lain sehingga baru dapat dilakukan sesuai dengan waktu luang mahasiswa. Wawancara dilakukan sebanyak 5 kali pertemuan dengan materi yang berbeda.

Adapun soal-soal pada tes uraian dan wawancara untuk mengetahui pemahaman mahasiswa terhadap materi Sistem Bilangan Real yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- **Materi I: Jenis-jenis Bilangan Real**

1. Sebutkan dan jelaskan jenis-jenis bilangan apa saja yang termasuk bilangan real?
2. Menurut kamu, adakah bilangan real yang paling mendekati bilangan 0? Jika ada, berikan contoh! Jika tidak, mengapa?
3. Apakah bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 berhingga banyaknya atau tidak berhingga banyaknya. Jelaskan pendapatmu!

4. Apakah bilangan $2,32110111011101 \dots \dots \dots$ adalah bilangan rasional atau bilangan irrasional? Berikan alasan!
5. Jumlah dua bilangan irrasional adalah irrasional pula. Jika ya, berikan alasan! Jika tidak, berikan contoh!
6. Apakah hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah irrasional? Jika ya, berikan alasan! Jika tidak, berikan contoh!
7. Apakah hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional? Berikan alasan!
8. Jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, termasuk bilangan apakah hasil kali dari kedua bilangan tersebut?
9. Apakah $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$. Berikan alasan?
10. Untuk bilangan real a yang mana saja, nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$)?
11. Apakah kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu?
12. Apakah akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu?

• **Materi ke-II: Sifat Aljabar Pada Bilangan real**

13. Buktikan bahwa jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $-(a + b) = (-a) + (-b)$!

14. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan berikut melalui langkah-langkah yang disertai alasan, mengapa langkah itu ditempuh (alasan dapat berupa aksioma, sifat, definisi atau teorema yang sesuai)!

$$3\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 4\left(3x - \frac{1}{2}\right)$$

- **Materi ke-III: Pembuktian Bilangan Rasional**

15. Buktikan bahwa $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional !

- **Materi ke-IV: Sifat Urutan Pada Bilangan Real**

16. Jika $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $a < b$ dan $c < d$, buktikan bahwa $ad + bc < ac + bd$!
17. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan berikut melalui langkah-langkah yang disertai alasan, mengapa langkah itu ditempuh (alasan dapat berupa aksioma, sifat, definisi atau teorema yang sesuai) dengan menggunakan definisi nilai mutlak!

$$1 < x^2 < 4 !$$

- **Materi ke-V: Sifat Kelengkapan Pada Bilangan Real.**

18. Pada himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ dikenal konsep-konsep: batas atas, batas bawah, terbatas, supremum, infimum, maksimum dan minimum. Jelaskan definisi dan konsep-konsep tersebut!
19. Berikan contoh disertai alasan himpunan bilangan yang memiliki batas atas dan batas bawah!
20. Berikan contoh disertai alasan himpunan bilangan yang memiliki batas atas tapi tidak memiliki batas bawah!

21. Berikan contoh disertai alasan himpunan bilangan yang tidak memiliki batas atas dan memiliki batas bawah!
22. Berikan contoh disertai alasan himpunan bilangan yang tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah!
23. Berikan contoh disertai alasan himpunan bilangan yang supremumnya ada tapi tidak memiliki infimum!
24. Berikan contoh disertai alasan himpunan bilangan yang infimumnya ada tapi tidak memiliki supremum!
25. Berikan contoh disertai alasan himpunan bilangan yang tidak memiliki supremum dan tidak memiliki infimum!
26. Diketahui $A = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Selidikilah apakah himpunan A memiliki batas atas, batas bawah, supremum dan infimum!

Adapun wawancara, dilakukan pada setiap subjek penelitian dengan cara direkam, selanjutnya ditranskripsikan dan dikodekan. Transkrip wawancara untuk setiap subjek penelitian dapat dilihat pada lampiran. Untuk memudahkan penulisan pada penyajian data, dibuat kode 'Pa.b.c.d' dan 'Sa.b.c.d'.

Keterangan:

P : Pewawancara

S : Subjek Penelitian

a.b.c.d : Kode digit setelah P dan S. Digit pertama menyatakan subjek ke- a , $1 \leq a \leq 3$, digit kedua menyatakan soal ke- b $1 \leq b \leq 26$, digit ketiga menyatakan

wawancara ke- c , $1 \leq c \leq 5$ dan digit keempat menyatakan pertanyaan/suruhan atau jawaban ke- d

Sebagai ilustrasi dari penggunaan kode tersebut, diberikan contoh sebagai berikut.

P1.1.1.2 : Pewawancara untuk Subjek S1, soal ke-1, wawancara I dan pertanyaan/suruhan ke-2

S1.1.1.2 : Subjek S1, soal ke-1, wawancara I, dan jawaban/respon ke-2.

a) Penyajian Data dan Validasi data Subjek S1 tentang Pemahaman dalam Menyelesaikan Soal-soal Materi Sistem Bilangan Real

Untuk mengetahui pemahaman subjek terhadap materi Sistem Bilangan Real terlebih dahulu dilakukan penyajian data, validasi data, dan interpretasi data dari tes uraian dan wawancara. Pemberian tes uraian dengan materi Sistem Bilangan Real dilaksanakan pada hari Rabu, 26 September 2012 dan wawancara pertama dilaksanakan pada hari Minggu, 4 November 2012, wawancara kedua dilaksanakan pada Senin, 5 November 2012, wawancara ketiga dilaksanakan pada hari Selasa, 6 November 2012, wawancara keempat dilaksanakan pada hari Rabu, 7 November 2012 dan wawancara kelima dilaksanakan pada hari Kamis, 8 November 2012. Semua wawancara dilakukan di Unismuh Makassar.

1) Penyajian Data Pemahaman Subjek S1 dalam menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real melalui Metode Tes Uraian.

Berikut ini adalah hasil tes uraian Subjek S1 tentang pemahaman terhadap Materi Sistem Bilangan Real dalam menyelesaikan soal-soal pada materi tersebut, disertai dengan interpretasinya.

- **Pemahaman terhadap Materi Jenis-Jenis Bilangan Real**

1. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 bisa menyebutkan dengan benar jenis-jenis bilangan real dan dapat menjelaskan definisi bilangan-bilangan tersebut dengan baik, namun belum dapat mendefinisikan secara simbolik dan sempurna khususnya untuk bilangan rasional, bilangan irrasional dan bilangan pecahan. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 1 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal tersebut adalah pemahaman relasional.

• Bilangan prima adalah bil. yang hanya memiliki dua faktor yaitu satu dan $E-x$
 bil. itu sendiri. $E > 0 < E(E-x)$ $1 < 0 < 1(1-x)$ $E > 0 < E(E-x)$
 contoh: 2, 3, 5, 7, 11, ... $E < (E+2)+x$ $E < (1+1)+x$ $E < (E+E)+x$

• Bilangan komposit adalah bil. yang memiliki lebih dari dua faktor $E < 0 + x$
 contoh: 4, 6, 8, 9, 12, ... $E < x$ $E < x$ $E < x$

• Bilangan Asli adalah gabungan bil. satu, bil. prima dan bil. komposit
 contoh: 1, 2, 3, 4, 5, ...

• Bil. Cacah adalah bil. yang terdiri dari nol dan bil. Asli $[0 > 1-x \wedge 0 > E-x]$ $E > 1-x$
 contoh: 0, 1, 2, 3, 4, ... $0 > E-x$ $0 > 1-x$ $0 > (E-x)$

• Bil. Bulat Negatif $E > 0 < E(E-x)$ $1 > 0 < 1(1-x)$ $E > 0 < E(E-x)$
 contoh: $\pm 1, -2, -3, -4, -5, \dots$ $E < (E+2)+x$ $E < (1+1)+x$ $E < (E+E)+x$

• Bil. Bulat adalah bil. yang terdiri dari bil. bulat negatif dan bil. cacah serta $0 + x$
 terdiri dari bil. genap dan bil. ganjil. $1 > x$ $E > x$
 contoh: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

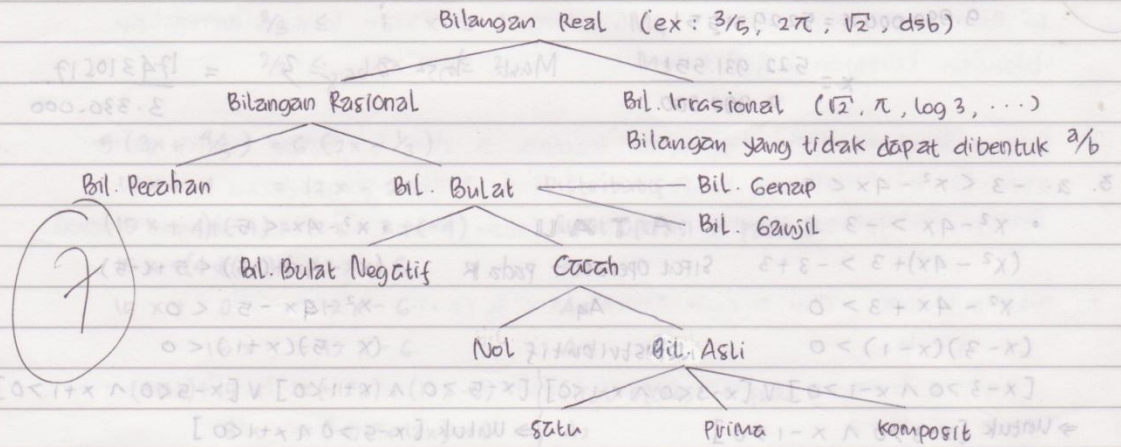
• Bil. Rasional adalah bil. yang dapat terbentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$
 contoh: $\frac{2}{5}$, $0,1212\dots$, $\frac{1}{2}$, ...

• Bil. Pecahan adalah bilangan yang terbentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$
 contoh: $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{9}{4}$, ...

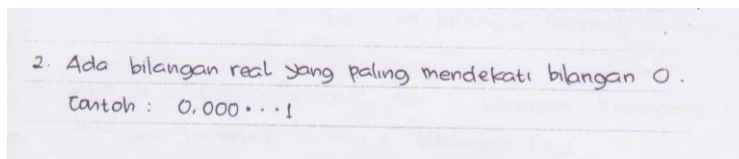
• Bil. Irrasional adalah bilangan yang tidak dapat terbentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$
 contoh: $\sqrt{2}$, π , $\log 3$, ...

• Bil. Real adalah bilangan yang terdiri dari bilangan rasional dan bil. irrasional
 contoh: $\frac{2}{5}$, 2π , $\sqrt{2}$, $1,3$, $1,1$, $1,2$, ...

1. Bagan sistem bilangan real :

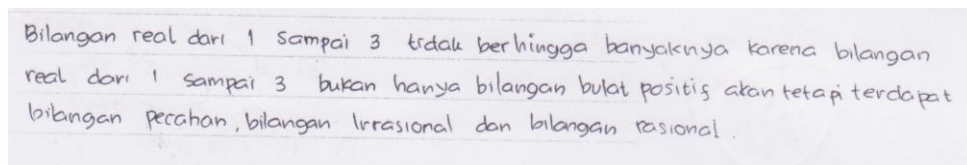


2. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 salah dalam menjawab soal dengan mengatakan bahwa ada bilangan real yang paling mendekati bilangan nol, yaitu $0,000 \dots 1$, dengan melihat contoh karena contoh tersebut tidak diketahui berapa banyak 0 dibelakang koma maka subjek menyimpulkan bahwa inilah contoh bilangan real yang paling mendekati nol . Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 2 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami karena tidak dapat menunjukkannya melalui bukti kontradiksi. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami konsep bilangan real dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.



2. Ada bilangan real yang paling mendekati bilangan 0 .
Contoh : $0,000 \dots 1$

3. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 mampu menjawab dengan benar bahwa diantara bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 tidak berhingga banyaknya bilangan dengan alasan bahwa diantara bilangan tersebut terdapat bukan hanya bilangan bulat positif akan tetapi terdapat bilangan pecahan, bilangan irrasional dan bilangan rasional namun belum dapat menunjukkan buktinya secara matematis. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 3 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 3 adalah pemahaman relasional.



Bilangan real dari 1 sampai 3 tidak berhingga banyaknya karena bilangan real dari 1 sampai 3 bukan hanya bilangan bulat positif akan tetapi terdapat bilangan pecahan, bilangan irrasional dan bilangan rasional .

4. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S1 dengan benar soal tersebut dengan langkah-langkah yang tepat yaitu mengubah bentuk desimal berulang $2,32110111011101 \dots$ menjadi bentuk $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ dengan cara memisalkan $x = 2,32110111011101 \dots$, lalu mengalikannya dengan 100.000 dan 1.000.000.000 kemudian mengurangkannya sehingga angka dibelakang koma yang sama akan habis dan menghasilkan bentuk $\frac{a}{b}$, namun demikian, subjek belum dapat mengemukakan alasan mengapa memisalkan $x = 2,32110111011101 \dots$. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 4 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Bilangan $2,32110111011101 \dots$ adalah bilangan Rasional karena bilangan tersebut dapat di bentuk dengan $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

Bukti:

Misal, $x = 2,32110111011101 \dots$

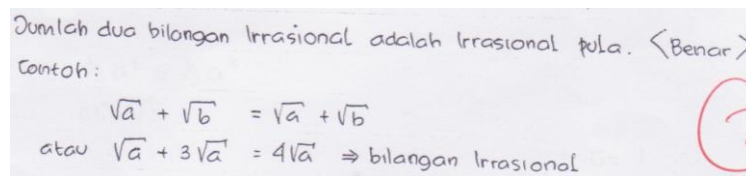
Maka

$$\begin{aligned} 1.000.000.000x &= 232110111011101 \dots \\ 100.000x &= 232110,11101 \dots \\ \hline 999.900.000x &= 2320869000 \end{aligned}$$
$$x = \frac{2320869000}{999900000}$$
$$x = \frac{2320869}{999900}$$

(5)

5. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S1 tidak mampu menjawab dengan benar bahwa jumlah dua bilangan irrasional selalu menghasilkan bilangan irrasional, walaupun subjek memberikan beberapa contoh untuk menunjukkan bahwa jumlah dua bilangan irrasional selalu menghasilkan

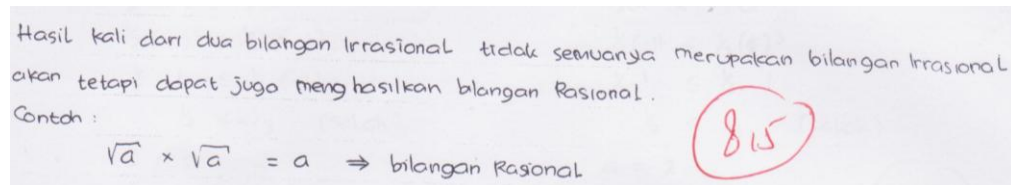
bilangan irrasional dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua bilangan irrasional. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 5 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga tidak dapat memberi contoh bahwa dengan menjumlahkan bilangan irrasional dengan inversnya pada penjumlahan bisa menghasilkan bilangan rasional yaitu 0. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami konsep penjumlahan bilangan irrasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.



Jumlah dua bilangan Irrasional adalah Irrasional pula. <Benar>
 Contoh:
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
 atau $\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = 4\sqrt{a} \Rightarrow \text{bilangan Irrasional}$

6. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 menjawab dengan benar bahwa tidak selalu hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah irrasional dengan bukti counter example yaitu memberikan contoh penyangkal yaitu $2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 2(\sqrt{5})^2 = 2\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2(5^{\frac{1}{2} \times 2}) = 2(5^1) = 2 \cdot 5 = 10$, 10 adalah bilangan rasional dengan memberikan alasan bahwa dalam menyelesaikan soal tersebut digunakan sifat eksponen. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 6 pada materi jenis-jenis bilangan real di mana subjek memberikan bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga dapat memberi contoh bahwa dengan mengalikan dua bilangan irrasional yang sama berbentuk akar seperti

pada contoh di bawah bisa menghasilkan bilangan rasional maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.



Hasil kali dari dua bilangan Irrasional tidak semuanya merupakan bilangan Irrasional akan tetapi dapat juga menghasilkan bilangan Rasional.
Contoh : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \Rightarrow$ bilangan Rasional

8.5

7. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 tidak mampu menjawab dengan benar bahwa hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional dengan alasan bilangan rasional itu termasuk bilangan pecahan, subjek mengambil contoh bilangan pecahan dibagi dengan bilangan pecahan hasilnya pasti bilangan pecahan yang juga merupakan bilangan rasional. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 7 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga tidak dapat memberi contoh bahwa bisa saja jika penyebutnya 0, 0 bilangan rasional maka hasilnya adalah tak terdefinisi dan syarat untuk mendapatkan bilangan rasional adalah $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami konsep pembagian dua bilangan rasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional karena bilangan rasional (bilangan pecahan) jika dibagi dengan bilangan pecahan akan menghasilkan bilangan pecahan yang juga merupakan bilangan rasional.

Contoh:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$= \frac{ad}{bc} \Rightarrow \text{bilangan Rasional}$$

(2)

8. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 tidak mampu menjawab dengan benar bahwa jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, maka hasil kali dari kedua bilangan tersebut adalah bilangan irrasional dengan memberikan satu contoh dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua hasil kali kedua bilangan tersebut. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 8 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bagaimana mengklasifikasikan perkalian dua bilangan yang menghasilkan bilangan rasional dan menghasilkan bilangan irrasional. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami konsep perkalian bilangan rasional dengan bilangan irrasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, maka hasil kali dari kedua bilangan tersebut termasuk bilangan Real.

Contoh:

$$a = \frac{5}{7} \quad b = \sqrt{3}$$

Maka:

$$a \times b = \frac{5}{7} \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \text{Bilangan Real}$$

(2)

9. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 menjawab dengan salah bahwa $\sqrt{a^2} = \pm a, \forall a \in \mathbb{R}$ dengan alasan subjek menggunakan sifat eksponen

yaitu mengubah bentuk akar ke bentuk pangkat dan mengalikan pangkat dengan pangkat, namun hasil tersebut mestinya $\sqrt{a^2} = a$, untuk $a > 0$, dan $\sqrt{a^2} = -a$ untuk $a < 0$ karena akar dari suatu bilangan positif haruslah positif tapi subjek tidak menyadari bahwa akar dari suatu bilangan positif haruslah positif. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami pembuktian dengan menggunakan definisi nilai mutlak bahwa $\sqrt{a^2}$ adalah $|a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$ sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= a, \forall a \in \mathbb{R} \\ \text{Bukti:} \\ \sqrt{a^2} &= (a^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{1}{2}} \\ &= a^1 \\ &= a \end{aligned} \quad \Rightarrow (a^n)^m = a^{nm} \quad \Rightarrow \sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Terbukti}$$

10. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 menjawab dengan benar namun belum lengkap bahwa nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$) adalah $a \geq 2$ atau $a = 0 \forall a \in \mathbb{R}$, dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai a satu persatu ke dalam pertidaksamaan tapi tidak menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 10 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

$\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$
 Misl :
 • $a = -1$
 $\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$
 $\frac{1}{2}(-1)^2 \leq \frac{1}{3}(-1)^3$
 $\frac{1}{2} \cdot 1 \leq \frac{1}{3} \cdot (-1)$
 $\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{3}$ (salah)
 • $a = 0$
 $\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$
 $\frac{1}{2}(0)^2 \leq \frac{1}{3}(0)^3$
 $\frac{1}{2} \cdot 0 \leq \frac{1}{3} \cdot 0$
 $0 \leq 0$ (Benar)
 • $a = 1$
 $\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$
 $\frac{1}{2}(1)^2 \leq \frac{1}{3}(1)^3$
 $\frac{1}{2} \cdot 1 \leq \frac{1}{3} \cdot 1$
 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}$ (salah)
 • $a = 2$
 $\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$
 $\frac{1}{2}(2)^2 \leq \frac{1}{3}(2)^3$
 $\frac{1}{2} \cdot 4 \leq \frac{1}{3} \cdot 8$
 $2 \leq \frac{8}{3}$ (Benar)

Dengan demikian, disimpulkan bahwa nilai a yang memenuhi untuk $\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$ adalah nol dan $a \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$.

11. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S1 menjawab dengan benar bahwa kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai satu persatu ke dalam pertidaksamaan tersebut namun belum dapat mencari himpunan penyelesaian dan mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku dengan menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 11 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu. (salah)

Karena ada dari bilangan real itu jika dikuadratkan nilainya lebih kecil dari bilangan yang dikuadratkan atau dengan kata lain Kuadrat dari suatu bilangan real tidak selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu.

Contoh:

$$\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

6,5

12. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 menjawab dengan benar bahwa akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu cara mencoba-coba memasukkan nilai satu persatu ke dalam pertidaksamaan tersebut namun belum dapat mencari himpunan penyelesaian dan mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku dengan menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 12 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Akar dari suatu bilangan real positif tidak selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu:

Contoh:

$$\frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

6,5

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Aljabar pada Bilangan Real**

13. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 menjawab dengan benar dengan alasan yang tepat menggunakan teorema $-1(a) = (-a)$ namun masih ada langkah yang terlewatkan yaitu subjek tidak memisalkan $a + b = x$

terlebih dahulu, tapi langsung saja menyamakan bentuk antara $-1(a) = (-a)$ dengan $-(a + b) = -1(a + b)$. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 13 pada materi sifat aljabar pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

The image shows a handwritten mathematical proof on lined paper. At the top, it is titled "SIFAT ALJABAR PADA BILANGAN REAL". Below the title, it states "Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $-(a+b) = (-a) + (-b)$ ". The word "Bukti:" (Proof:) follows. On the left side, there is a red heart-shaped scribble containing the number "15". The proof proceeds with the equation $-(a+b) = (-1)(a+b)$, with "atau" (or) written below it. To the right of this, it says "Teorema $(-1) \cdot a = -a$ ". The next line is $(-1)(a+b) = (-1)a + (-1)b$, with "Distributif" written to the right. This is followed by $= (-a) + (-b)$, with "Teorema $(-1) \cdot a = -a$ " written to the right. The final line says "Maka disimpulkan:" (Therefore concluded:), followed by $-(a+b) = (-a) + (-b)$ and the word "Terbukti" (Proven).

14. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 menjawab dengan benar soal dengan alasan yang tepat namun ada langkah-langkah yang terlewat (tidak sistematis). Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 14 pada materi sifat aljabar pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

$3(2x + \frac{1}{3}) = 4(3x - \frac{1}{2})$	
$(3)(2x) + (3)(\frac{1}{3}) = 4(3x) + 4(-\frac{1}{2})$	Distributif
$6x + 1 = 12x + (-2)$	M ₄
$(-12x) + 6x + 1 = (-12x) + 12x + (-2)$	Ke-2 ruas ditambahkan $(-12x)$ + (Assuming pengurangan)
$-6x + 1 = 0 + (-2)$	A ₄
$-6x + 1 = -2$	A ₃
$-6x + 1 + (-1) = (-2) + (-1)$	Ke-2 ruas ditambahkan (-1) + An.
$-6x + 0 = -3$	A ₄
$-6x = -3$	A ₃
$(-1)(-6x) = (-1)(-3)$	Ke-2 ruas dikalikan (-1) + An.
$6x = 3$	Teorema $(-1)(-1) = 1$
$\frac{1}{6} \cdot (6x) = \frac{1}{6} \cdot 3$	Ke-2 ruas dikalikan $(\frac{1}{6})$
$(\frac{1}{6} \cdot 6)x = \frac{3}{6}$	A ₂
$1 \cdot x = \frac{3}{6}$	M ₄
$x = \frac{3}{6}$	M ₃
Jadi, nilai x untuk $3(2x + \frac{1}{3}) = 4(3x - \frac{1}{2})$ adalah $\frac{3}{6}$	

- **Pemahaman terhadap Materi Pembuktian Bilangan Rasional**

15. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 mampu menjawab dengan benar dengan langkah-langkah yang tepat namun ada langkah yang masih membutuhkan penjelasan. Setelah menganalisis hasil tes uraian soal nomor 15 pada materi pembuktian bilangan rasional, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada materi tersebut adalah pemahaman relasional.

BILANGAN RASIONAL

Buktikan bahwa $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional!

Bukti:

Andaikan $t = \sqrt{21}$ adalah bilangan rasional.

Dengan $t = \frac{a}{b}$ $b \neq 0$ $a, b \in \mathbb{Z}$

$t = \sqrt{21} \Rightarrow t^2 = 21$

$t = \frac{a}{b} \Rightarrow a, b$ relatif prime (?)

$t^2 = \frac{a^2}{b^2}$

$21 = \frac{a^2}{b^2}$

$a^2 = 21 b^2$

karena a^2 merupakan kelipatan 1, 3, 7, 21 maka a juga kelipatan 1, 3, 7, 21.

$a = 21k$ (ke-2 ruas dikuadratkan)

$a^2 = 441 k^2$

Dengan menggunakan sifat kesamaan maka:

$21 b^2 = 441 k^2$

$b^2 = 21 k^2$

karena b^2 merupakan kelipatan 1, 3, 7, 21 maka b juga kelipatan 1, 3, 7, 21.

Kesimpulan:

karena dalam bilangan rasional $t = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$) dan a, b relatif prime sehingga dapat disimpulkan bahwa pengandaian di atas SALAH, karena (a, b) nya bukan relatif prime yaitu (a, b) merupakan kelipatan 1, 3, 7, 21.

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Urutan pada Bilangan Real**

16. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S1 mampu membuktikan soal dengan benar dengan langkah-langkah pembuktian yang tepat walaupun dengan alasan yang kurang jelas dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 16 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

SIFAT URUTAN PADA BILANGAN REAL

Jika $a < b$ dan $c < d$ buktikan bahwa $ad + bc < ac + bd$!

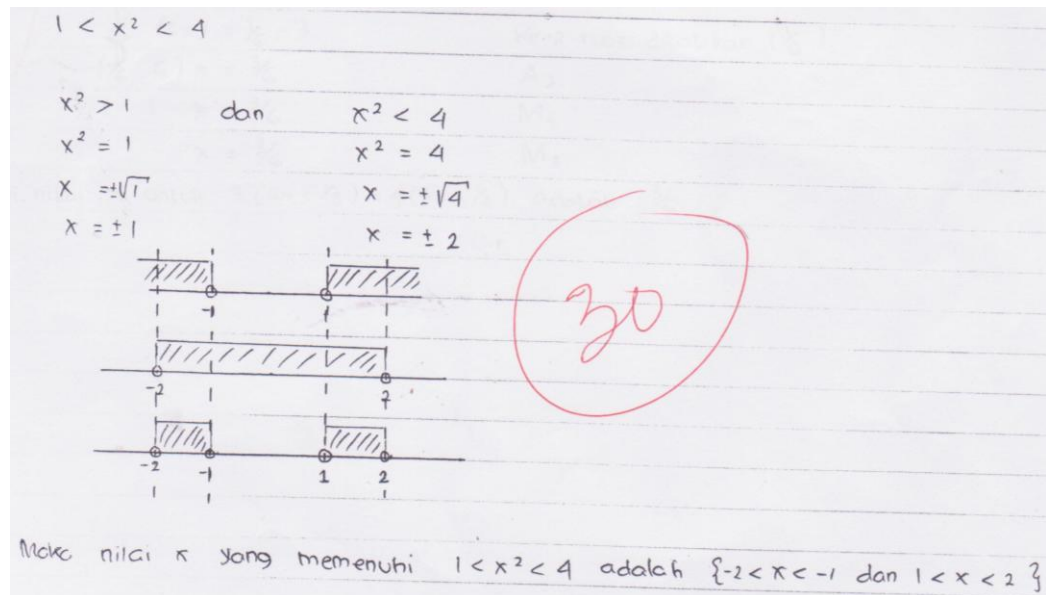
Bukti:

$a < b \Leftrightarrow -(a - b) \in \mathbb{P}$ $-a + b \in \mathbb{P}$ $b - a \in \mathbb{P}$	$c < d \Leftrightarrow -(c - d) \in \mathbb{P}$ $-c + d \in \mathbb{P}$ $d - c \in \mathbb{P}$
--	--

$a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{P}$ $c < d \Leftrightarrow d - c \in \mathbb{P}$ <hr style="width: 100%;"/> $(b - a)(d - c) \in \mathbb{P}$ $bd - bc - ad + ac \in \mathbb{P}$ $bd + ac - bc - ad \in \mathbb{P}$ $(bd + ac) - (bc + ad) \in \mathbb{P}$ $(bd + ac) > (bc + ad) \in \mathbb{P}$ $ac + bd > ad + bc \in \mathbb{P}$	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;"> Definisi Definisi Distributif A A₂ Definisi A₁ </div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; width: 100%;"> $ad + bc < ac + bd$ $= -(ad + bc) - (ac + bd)$ $= -(ad + bc) + (ac + bd)$ $= (ac + bd) - (ad + bc)$ $= ac + bd > ad + bc$ </div> </div>
---	--

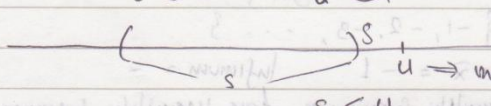
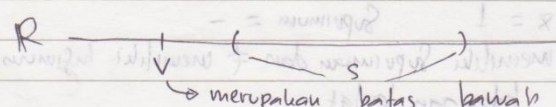
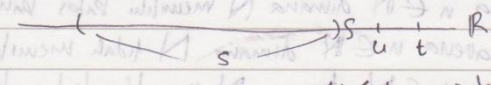
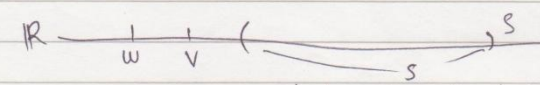
10
 Karena $ad + bc < ac + bd$ sama dengan $ac + bd > ad + bc$
 Maka Terbukti.

17. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 dapat menjawab dengan benar namun tidak mampu memberikan alasan yang jelas untuk mencari himpunan penyelesaian berdasarkan aksioma, definisi, teorema, atau sifat berkaitan dengan soal. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 17 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.



- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Kelengkapan Bilangan Real**

18. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S1 mampu mendeskripsikan konsep-konsep yang terkait dengan lengkap dan mendalam, namun belum dapat menjelaskan secara simbolik konsep-konsep tersebut. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 18 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

- Batas atas (bisa anggota S dan juga anggota \mathbb{R})
 $S \subseteq \mathbb{R}$ $s \in S$ $u \in \mathbb{R}$

 $s \leq u$ \rightarrow merupakan batas atas
- Batas bawah
 $S \subseteq \mathbb{R}$ $s \in S$ $v \in \mathbb{R}$

 $v \leq s$ \rightarrow merupakan batas bawah
- Terbatas, jika memiliki batas atas dan batas bawah. Dengan demikian, jika hanya memiliki batas atas atau batas bawah saja di katakan tidak terbatas.
- Supremum

 $u \leq t \rightarrow$ batas atas terkecil
 u Supremum S / $u = \sup S$
- Infimum

 $w < v \Rightarrow$ batas bawah terbesar
 v Infimum S / $v = \inf S$
- Maksimum : batas atas yang berada di himp. S
- Minimum : batas bawah yg berada di himp. S

19. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 19 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Contoh himpunan yang memiliki batas atas & batas bawah:

Himpunan bilangan asli ~~hingga~~ sampai 10.

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Batas atas = 10, 11, 12, ...
 Batas bawah = 1

20. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 20 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Contoh himpunan yg memiliki batas atas & \neq memiliki batas bawah
 Himpunan bilangan bulat negatif
 $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ \leftarrow Batas atas = -1
 Batas bawah = $-$

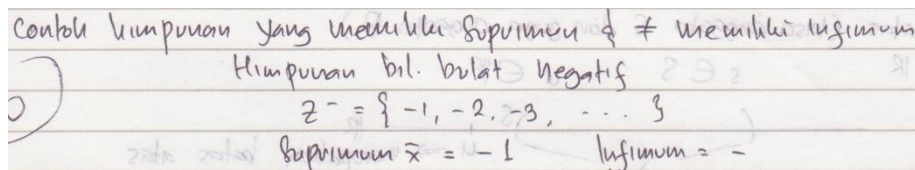
21. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 4 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek pada jawaban soal nomor 21 adalah pemahaman relasional.

Contoh himpunan yang memiliki batas bawah dan \neq memiliki batas atas
 Himpunan bilangan bulat tak negatif
 $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ \leftarrow Batas bawah = 0
 Batas atas = $-$

22. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 22 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

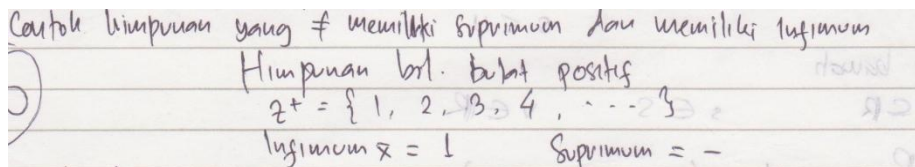
Contoh himpunan yang \neq memiliki batas atas & \neq memiliki batas bawah
 Himpunan bilangan bulat
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ \leftarrow Batas atas : $-$
 Batas bawah : $-$

23. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 mampu memberikan contoh namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 23 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.



Contoh himpunan yang memiliki Supremum & tidak memiliki Infimum
Himpunan bil. bulat negatif
 $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$
Infimum $x = -1$ Supremum $= -$

24. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang jelas dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 24 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.



Contoh himpunan yang tidak memiliki Supremum dan memiliki Infimum
Himpunan bil. bulat positif
 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
Infimum $x = 1$ Supremum $= -$

25. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 25 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Contoh himpunan yang \neq memiliki supremum dan \neq memiliki infimum
Himpunan bilangan bulat
 $Z = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$
Supremum $= -1$ dan Infimum $= 1$

26. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S1 tidak mampu memberikan jawaban yang benar dengan langkah-langkah penyelidikan yang tepat disertai dengan alasan yang tidak jelas dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 26 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami bagaimana menemukan batas atas, batas bawah, supremum dan infimum pada suatu himpunan bilangan pada materi sifat kelengkapan. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami konsep batas atas, batas bawah, infimum dan supremum pada suatu himpunan bilangan, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

$S = \{ (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \}$ tidak ada pada interval interval riil
Batas atas : tidak ada karena $n \in \mathbb{N}$, dimana \mathbb{N} tidak memiliki batas atas.
Batas bawah : ada karena $n \in \mathbb{N}$ dimana \mathbb{N} memiliki batas bawah 0.
Supremum : tidak ada karena $n \in \mathbb{N}$ dimana \mathbb{N} tidak memiliki batas atas
Infimum : ada karena $n \in \mathbb{N}$ dimana \mathbb{N} memiliki batas bawah 0

2) Penyajian Data Pemahaman Subjek S1 dalam menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real melalui Metode Wawancara.

Berikut ini adalah petikan wawancara dengan Subjek S1 tentang pemahaman dalam menyelesaikan soal-soal pada materi Sistem Bilangan Real I, disertai dengan interpretasinya.

- **Pemahaman terhadap Materi Jenis-jenis Bilangan Real**

Transkrip wawancara I nomor 1

P1.1.1.1 : ya wawancara pertama yaitu tes uraian sistem bilangan real nomor 1. Menurut kamu jenis-jenis bilangan apa saja yang termasuk bilangan real?

...

S1.1.1.2 : ya... jenis –jenis bilangan yang termasuk bilangan real ... e ... adalah yang pertama itu bilangan irrasional dan bilangan rasional, (menggambarkan bagan sistem bilangan real) nah bilangan rasional ini juga terbagi atas 2 yaitu bilangan pecahan dan bilangan bulat, pada bilangan bulat ...e ... terdiri ada yang disebut dengan bilangan genap dan ada bilangan ganjil, nah di bilangan bulat juga ini ada ... eh ada bilangan bulat negatif, ada bilangan cacah trus pada bilangan cacah dimulai dari 0 ... e ... 0 dan bilangan asli, trus bilangan asli itu terbagi atas 3 yaitu 1, prima ... bilangan prima , bilangan komposit

P1.1.1.3 : yah, kan tadi sudah anda sebutkan bilangan apa saja yang merupakan bilangan real ... e ... saya mau anda lebih menjelaskan lebih detail lagi ... e ... coba , bisakah anda menjelaskan mulai dari bilangan real sampai dengan bilangan komposit beserta dengan contohnya?

S1.1.1.3 : bilangan real ... e ... bilangan real itu gabungan dari bilangan irrasional dan bilangan rasional ... e ... contoh dari bilangan real itu misalnya $2\sqrt{3}$, ... e ... , logaritma 2, itu kan juga merupakan bilangan real trus bilangan rasional ... irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dibentuk ... e ... $\frac{a}{b}$ di mana b -nya itu tidak sama dengan 0, nah contoh dari bilangan rasional ... irrasional ini ... e ... misalnya π (phi) terus ... e ... bilangan logaritma dan akar

...

P1.1.1.23 : trus bilangan rasional

S1.1.1.23 : bilangan rasional itu bilangan yang dapat dibentuk ... e ... $\frac{a}{b}$ dan b -nya tidak sama dengan 0, yah kebalikan dari bilangan irrasional

P1.1.1.24 : kebalikan dari bilangan irrasional?

S1.1.1.24 : iye, trus di bilangan rasional itu juga jika dia desimal maka dia desimal berulang

...

P1.1.1.26 : iya, tapi saya mengacu pada definisi anda sendiri bahwa bilangan irrasional eh bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$, di mana b -nya $\neq 0$, itu saja toh?

S1.1.1.26 : iye, oh, kutahumi kak, eh itu bilangan irrasional tidak dapat dibentuk $\frac{a}{b}$ dengan b -nya $\neq 0$, karna kan ... e ... bila... e ... apa maksudnya di

sini, bilangan desimal yaitu yang tidak berulang kan, contohnya yang π itu kan tidak dapat dibentuk dengan $\frac{a}{b}$ begitu.

P1.1.1.27 : kemudian ... e ... coba dilihat lagi bilangan rasional apa lagi ... bilangan rasionalnya lagi lanjut ke bawah

S1.1.1.27 : e ... bilangan rasional trus ada bilangan pecahan ... e ... bilangan pecahan itu bilangan yang masih berbentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, tapi a -nya tidak habis dibagi b

P1.1.1.28 : tidak harus dibagi b ?

S1.1.1.28 : tidak habis dibagi b , contohnya itu $\frac{1}{2}$, eh ... habiski itu kah, maksudnya yang paling sederhanami itu misalnya $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ dan seterusnya.

P1.1.1.29 : jadi, pecahan, apa maknanya tadi? Bilangan pecahan adalah?

S1.1.1.29 : bilangan pecahan itu bilangan $\frac{a}{b}$, ... bilangan berbentuk $\frac{a}{b}$, a – nya itu pembilang dan penyebut b – nya $\neq 0$, a, b , elemen bilangan bulat ... e ... terus yang paling sederhana

...
P1.1.1.31 : apa maksudnya paling sederhana? apa yang dimaksud paling sederhana?

S1.1.1.31 : e ... misalnya itu $\frac{4}{6}$ itu kan bisa dibentuk menjadi $\frac{2}{3}$ paling sederhananya ... bilangan pecahan paling sederhana

...
P1.1.1.33 : maksud saya bahasakan apa itu bilangan sederhana... pecahan paling sederhana, ... bilangan yang paling sederhana?

S1.1.1.33 : eh ... paling sederhana adalah bilangan yang e... tinggal kalo misalnya dia cuman bisa dibagi dengan 1

P1.1.1.34 : cuman bisa dibagi dengan 1? Apanya yang bisa dibagi dengan 1?

S1.1.1.34 : $\frac{a}{b}$ -nya eh ... nilainya ... eh misalnya pembilangnya untuk ... misalnya kan kalo $\frac{4}{6}$, itu $\frac{4}{6}$ dibagi 2 kan e ... masih ada sederhananya $\frac{2}{3}$, nah $\frac{2}{3}$ ini kalo mau disederhanakan cuman tinggal dibagi dengan 1, bisanya jadi 2 bagi 1, kan 2, 3 bagi 1 ... 3

P1.1.1.35 : tidak bisa lagi dibagi dengan yang lain?

S1.1.1.35 : tidak

P1.1.1.36 : karna kan untuk menyederhanakan pecahan itu ... e ... dibagi dengan bilangan yang sama

S1.1.1.36 : bilangan yang sama?

P1.1.1.37 : iya.

S1.1.1.37 : nah kalo misalnya $\frac{2}{3}$ itu akan dibagi dengan 2 kan, 3-nya tidak bisa habis dengan 2

...

P1.1.1.39 : ok, lanjut

S1.1.1.39 : bilangan bulat

P1.1.1.40 : he ...em ... bilangan bulat

S1.1.1.40 : di bilangan bulat ada bilangan bulat negatif dan cacah ... bilangan bulat negatif itu contohnya ... e ... -1, -2, -3 dan seterusnya trus bilangan cacah dimulai dari 0 sam ... 0 dan bilangan asli 1, 2, 3 dan seterusnya, trus bilangan asli itu ada 1, prima dan komposit, e ... contoh bilangan prima itu 2, 3, 5, 7, 11 dan seterusnya, bilangan komposit 4, 6, 8, 9, dan seterusnya

...

P1.1.1.42 : yah pada ujian anda yang terdahulu, anda bilang di sini bilangan bulat terbagi 3 sedangkan di sini bilangan bulat terbagi atas 2 bisa anda jelaskan?

S1.1.1.42 : Iye

P1.1.1.43 : Kalo disini bilangan bulat terbagi atas 3 yaitu bilangan bulat negatif, 0 dan bilangan bulat positif

S1.1.1.43 : oh iye

P1.1.1.44 : sedangkan ini (menunjuk hasil pekerjaan subjek sekarang) bilangan bulat terbagi atas 2 bilangan bulat negatif dan bilangan cacah.

S1.1.1.44 : oh, iya, di situ pada ulangan pertama itu ditulis bilangan bulat negatif, 0 dan bilangan bulat positif, nah ... e ... bilangan bulat positif itu ... e ... nama lain dari bilangan asli

P1.1.1.45 : bilangan asli?

S1.1.1.45 : iya, e ... kan saya uraikan di sini cuman 2 yaitu bilangan cacah, bilangan cacah itu kan 0 dan bilangan asli trus bilangan asli itu juga merupakan bilangan bulat positif, karna 1, 2, 3 dan seterusnya kan bulat positif

P1.1.1.46 : jadi bilangan bulat positif sama dengan bilangan asli?

S1.1.1.46 : ya

P1.1.1.47 : oh, begitu?

S1.1.1.47 : iye

P1.1.1.48 : e ... apa yang dimaksud dengan bilangan prima?

S1.1.1.48 : e ... bilangan prima ... e ... adalah ... e ... bilangan yang memiliki hanya 2 faktor yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

P1.1.1.49 : apa maksudnya mempunyai 2 faktor?

...

S1.1.1.50 : pembagi kayaknya

P1.1.1.51 : pembagi?

S1.1.1.51 : iye

P1.1.1.52 : yang bisa habis? Apa maksudnya bisa habis?

S1.1.1.52 : e ... kan kalo maksudnya bulatki ... bilangan bulatki na hasilkan misalnya 2 bagi 1, 1 bagi 2 , ... 1 bagi 2 itu= ? ... e 2 dibagi 1 ... 2

... 2 dibagi 2 ... 1, itukan bilangan bulat kalo misalnya dibagi dengan 3 kan menghasilkanmi bilangan irrasional ... bilangan rasional

... ...

P1.1.1.57 : ok ok sedangkan bilangan komposit, apa bilangan komposit?

S1.1.1.57 : bilangan komposit yang memiliki lebih dari 2 faktor

P1.1.1.58 : lebih dari 2 faktor, maksudnya?

S1.1.1.58 : maksudnya, begini contohnya kan e ... kita ambil bilangan 4, 4 itu faktornya 1, 2 dan 4 e ... dia memiliki lebih dari 2 faktor maksudnya lebih dari 2 faktor ... e ... atau memiliki lagi faktor lain selain 1 dan bilangan itu sendiri

... ...

S1.1.1.60 : iye. kan, kalo kan kalo bilangan , tadi diketahui kalo bilangan prima kan ... e... 2 faktor ... 1 dan bilangan itu sendiri, nah kalo komposit itu memiliki lebih dari 2 bilangan ... e ... faktornya e ... nah saya ambil tadi 4, 4 kan 1, 2 dan 4 faktornya trus e... dia memiliki lebih dari 2 karna kan ... e dia kan 1, 2 dan 4 artinya dia memiliki 3

P1.1.1.61 : 3 faktor?

S1.1.1.61 : iye

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 bisa menyebutkan dengan benar jenis-jenis bilangan real dan dapat menjelaskan definisi bilangan-bilangan tersebut dengan baik, namun belum dapat mendefinisikan secara simbolik dan sempurna khususnya untuk bilangan raisonal, bilangan pecahan dan bilangan irrasional. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.1.1.3; S1.1.1.23; S1.1.1.24; S1.1.1.26; S1.1.1.27; S1.1.1.29; S1.1.1.40; S1.1.1.43; S1.1.1.44; S1.1.1.45; S1.1.1.48; S1.1.1.57; dan S1.1.1.58;] atas pertanyaan [P1.1.1.3; P1.1.1.23; P1.1.1.24; P1.1.1.26; P1.1.1.27; P1.1.1.29; P1.1.1.40; P1.1.1.43; P1.1.1.44; P1.1.1.45; P1.1.1.48; P1.1.1.57; dan P1.1.1.58;] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 1 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara I nomor 2

P1.2.1.1 : Kita lanjut ke nomor 2. Menurut kamu, adakah bilangan real yang paling mendekati bilangan nol? jika ada berikan contoh? Jika tidak, mengapa?

...

...

S1.2.1.2 : Ada

P1.2.1.3 : Ada? Yaitu?

S1.2.1.3 : Contohnya 0,00 ... dan seterusnya ... 0 ... sampai 1, koma 01

...

...

P1.2.1.5 : Berapa 0 nya ini? (sambil menunjuk tulisan Subjek)

S1.2.1.5 : Nda ditauki kak

P1.2.1.6 : Tak terhingga?

S1.2.1.6 : Iye

P1.2.1.7 : e ... jadi ... alasannya dulu alasannya mengapa anda mengatakan bahwa 0,00000 ... 1 adalah bilangan yang paling ..., bilangan real yang paling mendekati bilangan 0. Alasannya kenapa?

S1.2.1.7 : Karna ... kan ... ituji ... apa... bilangan 0,00 ... dan seterusnya ...01 itu menurut saya itulah yang paling mendekati

P1.2.1.8 : Itulah yang paling mendekati bilangan 0?

S1.2.1.8 : Iya. kan saya tidak batasi 0 nya berapa

P1.2.1.9 : Anda tidak membatasinya?

S1.2.1.9 : Iya, tak terhingga 0-nya di sini.

...

...

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 tidak mampu menjawab soal dengan benar dengan mengatakan bahwa ada bilangan real yang paling mendekati bilangan nol, yaitu 0,000 ... dan seterusnya ... 01 , alasannya karena subjek tidak membatasi berapa jumlah 0 dibelakang koma sehingga subjek merasa bilangan inilah yang paling mendekati 0. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.2.1.3; S1.2.1.5; S1.2.1.6; S1.2.1.8 dan S1.2.1.9] atas pertanyaan [P1.2.1.3; P1.2.1.5; P1.2.1.6; P1.2.1.8 dan P1.2.1.9] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 2 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami karena tidak dapat menunjukkannya melalui bukti kontradiksi. Dengan demikian, Subjek S1 tidak

memahami konsep bilangan real dengan menggunakan pembuktian dengan kontradiksi, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 3

P1.3.1.1 : ok kita lanjut ke nomor 3, apakah bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 berhingga banyaknya?

S1.3.1.1 : bilangan real 1 sampai 3 tidak berhingga banyaknya

P1.3.1.2 : mengapa tidak berhingga banyaknya?

...

...

S1.3.1.3 : bilangan real dari 1 sampai 3 itu tak berhingga banyaknya karna kita ketahui bahwa bilangan real itu kan bukan hanya bilangan bulat saja , nah ... e ... , dia ada yang bilangan irrasional, ada bilangan rasionalnya nah, diantara bilangan real 1 sampai 3, itu kita tidak ketahui ... e ... jikalau berapa banyak ... e ... diantara 1 sampai 3 itu, berapa banyak bilangan irrasional itu dan berapa banyak bilangan rasionalnya jadi saya simpulkan kalo dalam bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 itu tidak berhingga banyaknya

P1.3.1.4 : tidak berhingga banyaknya?

S1.3.1.4 : iye

P1.3.1.5 : tidak dapat dihitung?

S1.3.1.5 : tidak dapat

P1.3.1.6 : kalo saya bilang ada 1 juta banyaknya, betul atau tidak?

S1.3.1.6 : tidak

P1.3.1.7 : mengapa?

S1.3.1.7 : karna belum tentu hanya 1 juta masih banyak yang ... diantara 1 sampai 2 saja kita nda bisa hitung apalagi 1 sampai 3

...

...

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 mampu menjawab dengan benar bahwa diantara bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 tidak berhingga banyaknya bilangan dengan alasan bahwa diantara bilangan 1 sampai 3 terdapat bilangan yang tidak diketahui berapa banyaknya, baik itu bilangan bulat, rasional maupun irrasional, namun belum dapat menunjukkan buktinya secara matematis. Hal

ini diketahui melalui respon subjek [S1.3.1.1 dan S1.3.1.3] atas pertanyaan [P1.3.1.1 dan P1.3.1.3] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 3 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 3 adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara I nomor 4

- P1.4.1.1 : nomor 4, apakah bilangan 2,32110111011101 adalah bilangan rasional atau bilangan irrasional? Berikan alasan!
- S1.4.1.1 : bilangan rasional
- P1.4.1.2 : mengapa dikatakan bilangan rasional?
- S1.4.1.2 : karna di sini terlihat jelas di mana desimalnya itu berulang di 110 ... 11101110
- P1.4.1.3 : kenapa anda menyimpulkan bahwa jika desimalnya berulang maka dia adalah bilangan rasional?
- S1.4.1.3 : karena ... e ... jika desimalnya berulang itu maka dia dapat dibentuk $\frac{a}{b}$
- P1.4.1.4 : dia dapat dibentuk dengan $\frac{a}{b}$?
- S1.4.1.4 : iye
- P1.4.1.5 : bisa dibuktikan?
- S1.4.1.5 : bisa (mengerjakan dalam beberapa menit) ... 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... (menghitung jumlah angka di belakang koma pada bilangan desimal tersebut)
- P1.4.1.6 : jadi bisa dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$? (menunjuk hasil pekerjaan Subjek 1 yaitu $\frac{232869...}{9900}$)
- S1.4.1.6 : iye
- P1.4.1.7 : oh ya yang pertama yang saya mau tanyakan kenapa tiga 0 di belakangnya itu tiba-tiba tidak ada atau hilang
- ...
- S1.4.1.19 : oh dibagi 1000
- ...
- P1.4.1.21 : Ini dibagi 1000? (menunjuk pembilang)
- S1.4.1.21 : iye, dua-duanya itu dibagi 1000 (pembilang dan penyebut) bisajikah? Iya? Jadi kudapatmi ini.
- ...

- P1.4.1.24 : kemudian di sini di jawaban anda yang lalu, jawabannya adalah $\frac{2320869}{999.900}$, sedangkan jawaban anda sekarang adalah 2.321.869, yang mana yang benar?
- S1.4.1.24 : jangki dulu kak he ... he ... kenapa lagi salah (melihat kembali dan mengerjakan ulang pekerjaannya) ... salah lagi penguranganku di situ kak, dipenguranganku salahka di sini kak ituji $\frac{2320869}{999900}$
- P1.4.1.25 : jadi berapa?
- S1.4.1.25 : 2320869
- P1.4.1.26 : ya, sama dengan yang di sini? (menunjuk $\frac{2320869}{999.900}$) Yang mana yang benar? (menunjuk $\frac{2320869}{999.900}$ dan $\frac{2321869}{999.900}$)
- S1.4.1.26 : yang inimi kak, benarmi (menunjuk $\frac{2320869}{999.900}$)
- P1.4.1.27 : sudah cocok yang dulu ... yang tadi anda salah hitung, kita lanjut ke ..., oh iya mengapa anda membuktikannya dengan cara seperti itu?
- S1.4.1.27 : kan menurut saya ini, beginiji yang kutahu kak
- P1.4.1.28: mengapa? Alasannya mengapa anda gunakan cara ini untuk mendapatkan bentuk $\frac{a}{b}$?
- S1.4.1.28 : ini kayaknya yang lebih mudah kak, mungkin
- P1.4.1.29 : e ... maksud saya alasan memakainya?
- S1.4.1.29 : karna untuk membuktikan ini, apakah ini bisa dibentuk $\frac{a}{b}$ atau tidak
- P1.4.1.30 : jadi langsung saja dipakai?
- S1.4.1.30 : iye
- P1.4.1.31 : jadi langsung dicontoh saja?
- S1.4.1.31 : iye.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 dengan benar soal tersebut dengan langkah-langkah yang tepat yaitu mengubah bentuk desimal berulang $2,32110111011101 \dots$ menjadi bentuk $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ dengan cara memisalkan $x = 2,32110111011101 \dots$, lalu mengalikannya dengan 100.000 dan 1.000.000.000 kemudian mengurangkannya sehingga angka dibelakang koma yang sama akan habis dan menghasilkan bentuk $\frac{a}{b}$, namun demikian, subjek belum dapat mengemukakan alasan mengapa memisalkan $x = 2,32110111011101 \dots$ Hal ini diketahui melalui

respon subjek [S1.4.1.1; S1.4.1.2; S1.4.1.3; S1.4.1.5; S1.4.1.7; S1.4.1.21; S1.4.1.27; S1.4.1.28; S1.4.1.29; S1.4.1.30 dan S1.4.1.31] atas pertanyaan [P1.4.1.1; P1.4.1.2; P1.4.1.3; P1.4.1.5; P1.4.1.7; P1.4.1.21; P1.4.1.27; P1.4.1.28; P1.4.1.29; P1.4.1.30 dan P1.4.1.31] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 4 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 4 adalah pemahaman relasional

Transkrip wawancara I nomor 5

P1.5.1.1 : nomor 5, apakah jumlah dua bilangan irrasional adalah irrasional pula. Jelaskan alasanmu, berikan contoh ya kalo ada, jika ya, berikan alasan! Jika tidak, berikan contoh!

...

P1.5.1.3 : semua bilangan irrasional jika dijumlahkan dengan bilangan irrasional adalah bilangan irrasional? Berlaku secara umum? Untuk semua bilangan irrasional , jadi kan jika ada 2 bilangan irrasional, apakah semuanya menghasilkan bilangan irrasional pula?

S1.5.1.3 : iya kak.

P1.5.1.4 : contohnya?

S1.5.1.4 : contohnya $2\sqrt{5} + \sqrt{5}$, itukan ... ini $2\sqrt{5}$ kan bilangan irrasional , dan $\sqrt{5}$ juga bilangan irrasional, jika dijumlahkan maka dia menghasilkan $3\sqrt{5}$, nah $3\sqrt{5}$ itu juga masih merupakan bilangan irrasional

...

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 tidak mampu menjawab pertanyaan dengan benar bahwa jumlah dua bilangan irrasional selalu menghasilkan bilangan irrasional dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua bilangan irrasional. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.5.1.3 dan S1.5.1.4] atas pertanyaan [P1.5.1.3 dan P1.5.1.4] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 5 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga tidak dapat memberi contoh bahwa dengan menjumlahkan bilangan irrasional dengan inversnya pada penjumlahan bisa menghasilkan bilangan rasional yaitu 0. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami konsep penjumlahan bilangan irrasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 6

P1.6.1.1 : nomor 6 hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah irrasional, apakah hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah irrasional?

S1.6.1.1 : tidak semuanya

P1.6.1.2 : tidak semua?

S1.6.1.2 : iye

P1.6.1.3 : mengapa?

S1.6.1.3 : ... e ... saya masih ambil contoh yang tadi, contohnya itu $2\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ ini kan sama saja dengan $2 \times 5 = 10$

P1.6.1.4 : mengapa hasil perkaliannya menjadi 10?

S1.6.1.4 : $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$

P1.6.1.5 : apa sebabnya $2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 10$?

S1.6.1.5 : e .. kan $\sqrt{5}$ itu, $\sqrt{5}$ itu dapat dibentuk menjadi $5^{\frac{1}{2}}$

P1.6.1.6 : dari mana dapat?

S1.6.1.6 : karna begitu mi kak, nda bisa di ..., karna kan di ... saya ketahui itu kalo akar itu bisa dipangkat $\frac{1}{2}$ ini kan akar pangkat 2

P1.6.1.7 : akar pangkat 2?

S1.6.1.7 : iye

P1.6.1.8 : apa dasarnya?

S1.6.1.8 : nda kutahu itu kak, di buku ini kak

P1.6.1.9 : begitu?

S1.6.1.9 : iye kak, begitumi mungkin

P1.6.1.10 : coba anda kerjakan tadi sesuai dengan yang anda ketahui!

S1.6.1.10 : (subjek mengerjakan soal tadi)

P1.6.1.11 : (setelah melihat hasil pekerjaan subjek) mengapa $2 \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$, kenapa pangkatnya ditambah?
 S1.6.1.11 : e ... ini menurut teorema apa sifat yah dari perpangkatan?
 P1.6.1.12 : sifat dari perpangkatan?
 S1.6.1.12 : iye, kalo misalnya bilangan pokoknyanya sama e ... trus memiliki pangkat, pangkatnya langsung dijumlahkan.
 P1.6.1.13 : pangkatnya langsung dijumlahkan?
 S1.6.1.13: iye
 P1.6.1.14 : itu menurut apa tadi?
 S1.6.1.14: teorema apa sifat... awwah ... sifat kayaknya deh sifat perpangkatan... teorema ... sifat ini bu deh

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa Subjek S1 menjawab dengan benar bahwa tidak selalu hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah bilangan irrasional dengan bukti counter example yaitu memberikan contoh penyangkal yaitu $2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 2(\sqrt{5})^2 = 2\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2(5^{\frac{1}{2} \times 2}) = 2(5^1) = 2.5 = 10$, 10 adalah bilangan rasional dengan memberikan alasan bahwa dalam menyelesaikan soal tersebut digunakan sifat eksponen. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.6.1.1; S1.6.1.3; S1.6.1.11 dan S1.6.1.14] atas pertanyaan [P1.6.1.1; P1.6.1.3; P1.6.1.11 dan P1.6.1.14] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 6 pada materi jenis-jenis bilangan real di mana subjek memberikan bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga dapat memberi contoh bahwa dengan mengalikan dua bilangan irrasional yang sama dengan bentuk akar seperti pada contoh di atas bisa menghasilkan bilangan rasional maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.

Transkrip wawancara I nomor 7

- P1.7.1.1 : ya, nomor 7, apakah hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional? Berikan alasan!
- S1.7.1.1 : iya
- P1.7.1.2 : berikan alasannya?
- S1.7.1.2 : karna ...e ... misalkan kita ambil 2 bilangan rasional kalo misalnya dia berbentuk pecahan dibagi dengan bilangan yang masih berbentuk pecahan maka dia akan menghasilkan bilangan yang berbentuk pecahan , nah bilangan pecahan kan bilangan rasional juga , ya jadi seperti itu, trus misalnya bilangan pecahan e ... yang $a \times$ bilangan pecahan dan b -nya bilangan bulat maka hasilnya pasti berbentuk bilangan pecahan juga, nah bilangan pecahan lagi bilangan rasional , trus ituji kak dan seterusnya
- P1.7.1.3 : bisa dituliskan hasil ... bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional?
- S1.7.1.3 : (subjek mengerjakan soal) ... contohmi kak
- P1.7.1.4 : he em (mengiyakan) alasannya dulu alasannya ... alasannya tolong dituliskan kembali ...tadi kan sempat menjelaskan bilangan pecahan, mengapa anda menyimpulkan akan berbentuk $\frac{a}{b}$ lagi?
- S1.7.1.4 : jadi hasil bagi dari 2 bilangan rasional itu adalah bilangan rasional sendiri nah ... e ... alasannya karna kan e ... pembagian itu bisa juga dibentuk dengan $\frac{a}{b}$ nah kalo misalnya kita ambil 2 buah bilangan rasional, misalnya bilangan a dan b dibagi maka kan bisa juga kita tuliskan $\frac{a}{b}$ seperti itu
- P1.7.1.5 : jadi ini menurut ujian anda yang pertama , hampir sama yah, cuma dia anda bilang di sini hasil bagi dari 2 bilangan rasional adalah bilangan rasional karna bilangan rasional atau bilangan pecahan jika dibagi dengan bilangan pecahan akan menghasilkan bilangan pecahan yang juga merupakan bilangan rasional contohnya di sini anda misalkan $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, menurut anda itu jawaban anda ada sudah benar? Sama dengan ini?
- S1.7.1.5 : iya kak

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 tidak mampu menjawab dengan benar bahwa hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional

dengan alasan bilangan rasional itu termasuk bilangan pecahan , subjek mengambil contoh bilangan pecahan dibagi dengan bilangan pecahan hasilnya pasti bilangan pecahan yang juga merupakan bilangan rasional. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.7.1.1; S1.7.1.2 dan S1.7.1.5] atas pertanyaan [P1.7.1.1; P1.7.1.2 dan P1.7.1.5] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 7 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga tidak dapat memberi contoh bahwa bisa saja hasilnya tak terdefinisi jika penyebutnya 0, 0 bilangan rasional dan syarat untuk mendapatkan bilangan rasional adalah $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami konsep pembagian dua bilangan rasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 8

P1.8.1.1 : lanjut nomor 8, jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, termasuk bilangan apakah hasil kali dari kedua bilangan tersebut?

S1.8.1.1 : bilangan ... secara umum bilangan real tapi kalo ...

P1.8.1.2 : tapi kan di sini pertanyaannya Jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, termasuk bilangan apakah hasil kali dari kedua bilangan tersebut?

S1.8.1.2 : (mengerjakan soal) bilangan irrasional kak

...

P1.8.1.4 : kenapa?

S1.8.1.4 :karna kan diketahui a itu bilangan rasional dan b -nya bilangan irrasional nah jika dikalikan itu menurut saya ... e ... dia akan menghasilkan bilangan irrasional, saya ambil contoh $\frac{1}{3}$... dengan $\frac{1}{3}$ itu sebagai bilangan rasional dan π sebagai b saya kalikan maka dia menghasilkan $\frac{1}{3}\pi$, nah bilangan $\frac{1}{3}\pi$ itu merupakan bilangan irrasional

...

P1.8.1.6 : iya, kemudian yang tadi yah soal, untuk soal yang lalu kan anda menuliskan ujian tulisannya bahwa hasil kali kedua bilangan tersebut adalah bilangan real, yang mana yang benar di sini , maksud anda bilangan real di sini apa maksudnya?

S1.8.1.6 : e ... bilangan real kan termasuk bilangan ..., awalnya begini e ... saya katakan bilangan irrasional itu karna kan di bilangan rasional ... dibilangan real itu kan terdiri atas rasional dan irrasional seperti itu

P1.8.1.7 : Jadi ini jawabannya bagaimana tepatnya?

S1.8.1.7 : Bisa benar bisa tidak

P1.8.1.8 : Bisa benar bisa tidak?

S1.8.1.8 : Iye, karna kan dibilangan real itu mencakup irrasional dan rasional

P1.8.1.9 : Trus, yang ini kan lebih sempit, bilangan irrasional, jadi menurut anda yang mana yang benar? Bilangan ini real atau irrasional?

S1.8.1.9 : Kalo menurut saya dua-duanya benar

P1.8.1.10 : Dua-duanya benar?

S1.8.1.10 : Iye, karna kan di situ bilangan e... di bilangan real kan termasukji juga bilangan irrasional

P1.8.1.11 : Tapi apakah setiap ... satu kali dikalikan ... jadi setiap kali dikalikan bisa rasional dan irrasional?

S1.8.1.11 : Tidak

P1.8.1.12 : Tidak?

S1.8.1.12: Iye, salah satunya

P1.8.1.13 : Salah satunya saja, kalo bilangan real ... jadi ini apa yang anda maksud bilangan real di sini?

S1.8.1.13 : (berpikir lama) Maksudnya kak?

P1.8.1.14 : Kan kalo bilangan real kan ada 2 bilangan rasional dan irrasional jadi kalo misalnya saya suruh mengalikan antara bilangan rasional dan irrasional berarti bisa menghasilkan dua hasil berarti bilangan rasional dan bilangan irrasional, begitu kan kalo bilangan real toh?

S1.8.1.14 : Iye

P1.8.1.15 : Kan bilangan real kan dua kalo ini jawaban anda bilangan irrasional

S1.8.1.15 : Iya ...iya

P1.8.1.16 : Kalo bilangan real kan saya kalikan dua bilangan rasional dan irrasional berarti dia bisa bilangan rasional sekaligus bilangan irrasional?

S1.8.1.16 : tidak

P1.8.1.17 : tidak?

S1.8.1.17 : iye, maksud saya di situ ... e ... dia... jika dikalikan itu bisa bilangan rasional, bisa juga bilangan irrasional tapi tidak kedua-duanya

P1.8.1.18 : tidak bisa kedua-duanya?

S1.8.1.18 : iya

P1.8.1.19 : jadi yang mana yang benar di sini rasional atau irrasional?

- S1.8.1.19 : irrasionalmo kak
P1.8.1.20 : irrasional? Alasan?
S1.8.1.20 : karna ... lebih ... apa di ... ini kan kalo yang itu mungkin bisa saja orang ini mengira kalo dikalikan itu bisa e ... hasilnya bisa bilangan rasional dan juga bilangan irrasional kalo yang ini langsung
P1.8.1.21 : bilangan irrasional?
S1.8.1.21 : iye, sempitki bahwa kalo misalnya bilangan rasional dan irrasional dikalikan maka hasilnya irrasional
P1.8.1.22 : jadi yang ini salah? (jawaban bilangan real yang ditunjuk), bilangan real salah?
S1.8.1.22 : begitumi kak
P1.8.1.23 : oh begitu kenapa dulu anda mengatakan bilangan real? Mengapa dulu anda menjawab bilangan real?apa alasannya?
S1.8.1.23 : e ... itu tadi kak e ... alasan saya yaitu karna kan e ... jika dikalikan itu bilangan rasional dan irrasional dikalikan awalnya saya berpikir kalo dikalikan itu pasti akan menghasilkan bilangan real, tapi di bilangan real kan ada 2 rasional dan irrasional, saya tidak pernah berpikir kalo mungkin ada orang lain yang bermaksud ... maksudnya pas dikalikan itu langsung dua-duanya yang jadi, saya berpikir waktu itu cuman bisa rasional atau bisa irrasional tapi tidak untuk kedua-duanya langsung,
P1.8.1.24 : maksudnya anda ambil saja secara luasnya begitu?
S1.8.1.24 : Iye secara luasnya
P1.8.1.25 : Tanpa berpikir lebih jauh lagi? Begitu?
S1.8.1.25 : Iye saya ... iya saya nda ...berpikir ke situ.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 tidak mampu menjawab dengan benar mengandalkan perasaan bahwa hasil kali dari a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, adalah bilangan real karena bilangan real itu sudah memuat bilangan rasional dan irrasional, namun subjek hanya mampu memberikan contoh-contoh perkalian dari dua bilangan tersebut hanya menghasilkan bilangan irrasional namun subjek tidak dapat memberikan alasan kapan hasilnya bilangan rasional Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.8.1.2; S1.8.1.4; S1.8.1.6; dan S1.8.1.23] atas pertanyaan [P1.8.1.2; P1.8.1.4; P1.8.1.6; dan P1.8.1.23] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 8 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bagaimana mengklasifikasikan perkalian dua bilangan yang menghasilkan bilangan rasional dan menghasilkan bilangan irrasional. Dengan demikian, subjek S1 tidak memahami konsep perkalian bilangan rasional dengan bilangan irrasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 9

P1.9.1.1 : nomor 9, apakah $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$. Berikan alasanmu!

S1.9.1.1 : nah $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$. Itu benar

P1.9.1.2 : benar?

S1.9.1.2 : iye, karna kan diketahui tadi kalo akar itu sama saja dengan pangkat $\frac{1}{2}$,

saya ubah lagi $\sqrt{a^2}$ dikali $(a^2)^{\frac{1}{2}}$, nah ini lagi merupakan sifat perpangkatan kalo misalnya $(a^m)^n$ maka dia sama saja dengan a^{mn}

P1.9.1.3 : itu dari mana?

S1.9.1.3 : e ... sifat perpangkatan seperti tadi

P1.9.1.4 : trus ... kemudian

S1.9.1.4 : terus $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{(2 \times \frac{1}{2})} \dots \frac{1}{2} \times 2 = 1$, jadi $a^1 = a \dots a = a$

P1.9.1.5 : jadi apakah menurut anda sudah benar pernyataan di atas?

S1.9.1.5 : $a \in \mathbb{R}$... iya ... ih tapi kalo minus ... tidak di'

P1.9.1.6 : tadi kenapa kalo minus ... dilanjut

S1.9.1.6 : kalo minus ... tunggu dulu ... samaji kak

P1.9.1.7 : samaji? kalo $\sqrt{-a^2} = \dots$ coba ... coba saya mau lihat tadi ... yang tadi ... itu = (sambil melihat hasil pekerjaan subjek)

S1.9.1.7 : (mengerjakan kembali) iya di $-a$, ... tapi kalo langsung maka $-a^2$, a^2 ?

P1.9.1.8 : jadi, bagaimana menurut anda?

S1.9.1.8 : aduh ... (bingung) bingunga ... saya jadi bingung cocokmi kak

P1.9.1.9 : Sudah cocok ini?

S1.9.1.9 : Iye

P1.9.1.10 : trus yang ini tadi $\sqrt{-a^2}$, bagaimana?

S1.9.1.10 : kalo dijabarkan seperti ini ki ... a , tapi kalo misalnya $-a^2$ -nya dulu yang dikerjakan baru diakarkan samaji ini kak

P1.9.1.11 : samaji?

- S1.9.1.11 : iye
- P1.9.1.12 : kalo $-a$ yang diakarkan baru dipangkat dua, begitu?
- S1.9.1.12 : iye, sama ini dulu $(-a^2)^{\frac{1}{2}}$
- P1.9.1.13 : trus yang ini $(-a)^2 \dots$ hasilnya $\sqrt{-a^2}$ itu hasilnya $-a$ jadi yang mana yang benar kan $\forall a \in \mathbb{R}$ kan?
- S1.9.1.13 : iya
- P1.9.1.14 : jadi a -nya bisa apa? Bisa berbentuk \dots di sini \dots bisa dalam bentuk a dan bisa juga dalam bentuk ini kan, yang anda sudah tulis?
- S1.9.1.14 : ya
- P1.9.1.15 : jadi yang mana yang benar ini?
- S1.9.1.15 : kalo ini semua, kalo untuk semua dikerjakan seperti ini maka benarji $a \in \mathbb{R}$ tapi kalo dikerja lagi masih pakeki sifatnya ini maka $-a$
- P1.9.1.16 : ya, jadi? Kembali ke pertanyaan tadi apakah $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$, apakah benar ini? Sudah cocok $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$, sudah cocok itu?
- S1.9.1.16 : aduh \dots kenapa begitu, (lama berpikir) ya ini kayaknya samaji dengan konsep yang begini kak $\dots -1 \dots$ tapi kalo dijabarkan seperti ini maka dia menghasilkan -1
- P1.9.1.18 : Kan ditanya tadi apakah $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$, ya atau tidak?
- S1.9.1.18 : tidak kak
- P1.9.1.19 : tidak, alasannya?
- S1.9.1.19 : karna kalo minuski 2 jawaban
- P1.9.1.20 : kalo minuski 2 jawaban? Jadi mestinya apa di sini?
- S1.9.1.20 : $\pm a$
- P1.9.1.21 : $\pm a$?
- S1.9.1.21 : iya jadi kalo positifki di siniji kak, positif tongi nda ada minusnya, kalo saya, ini saja yang persempit kak (menunjuk \mathbb{R})
- P1.9.1.22 : persempitki itu \mathbb{R} -nya?
- S1.9.1.22 : menjadi bilangan bulat positif \dots hi \dots hi \dots
- P1.9.1.23 : dipersempitki?
- S1.9.1.23 : iye kalo saya supaya tidak menghasilkanki yang ini kak, bingungka juga yang mana yang benar.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 menjawab dengan salah bahwa $\sqrt{a^2} = \pm a, \forall a \in \mathbb{R}$ dengan alasan subjek menggunakan sifat eksponen yaitu mengubah bentuk akar ke bentuk pangkat dan mengalikan pangkat dengan pangkat, namun hasil tersebut mestinya $\sqrt{a^2} = a$, untuk $a > 0$, dan $\sqrt{a^2} = -a$ untuk $a < 0$

karena akar dari suatu bilangan positif haruslah positif tapi dari sini subjek tidak menyadari bahwa akar dari suatu bilangan positif haruslah positif. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.9.1.4; S1.9.1.5; S1.9.1.15; S1.9.1.18 dan S1.9.1.20] atas pertanyaan [P1.9.1.4; P1.9.1.5; P1.9.1.15; P1.9.1.18 dan P1.9.1.20] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 9 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami bahwa $\sqrt{a^2}$ adalah nilai mutlak dari $|a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$, melalui suatu pembuktian dengan menggunakan definisi nilai mutlak. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami konsep pembuktian dengan menggunakan definisi nilai mutlak, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 10

- P1.10.1.1 : ok, kita lanjut nomor 10 untuk bilangan real a yang mana saja, nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$)?
- S1.10.1.1 : apaji kutulis di situ dende ... aduh ... bilangan real (mengerjakan kembali) saya ambil minus ... positif -1 juga salah ... tunggu dulu kak $a = 0$ **dan** $a \geq 2$
- P1.10.1.2 : apa alasanta? Mengapa bisa tiba-tiba mendapatkan $a = 0$?
- S1.10.1.2 : karna jika kita ... kan bilangan real a yang mana saja pilih 0 dulu awalnya , 0 jika disubstitusi nilai a ini ke persamaan ini maka dia menghasilkan 0 karna dia memenuhi tanda $=$ artinya $0 = 0$... terus kalo misalnya ... 1 ... $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}$ salah, $\frac{1}{2}$ mestinya $> \frac{1}{3}$
- P1.10.1.3 : ya, jadi mulai dari 2?
- S1.10.1.3 : iye, kan kalo 2 itu artinya 4 ... 2 di sini $\leq \frac{8}{3}$, $\frac{8}{3}$ itu 2,6 kalo nda salah
- P1.10.1.4 : jadi untuk bilangan a bilangan real itu hanya di atasnya 2 saja
- S1.10.1.4 : iya
- P1.10.1.5 : yakin, hanya itu saja bilangan realnya?
- S1.10.1.5 : iya

P1.10.1.6 : nda adami yang lain?

S1.10.1.6 : $a = 0$ **dan** $a \geq 2$

P1.10.1.7 : tidak ada yang lain lagi?

S1.10.1.7 : nda ada, karna kalo kita ambil negatif e .. di sini lagi yang kan dia akar ... pangkat 3, kalo misalnya negatif itu pangkat 3 pasti akan menghasilkan minus lagi negatif jadi pasti akan lebih kecil dari ini karna inikan dia pangkat 2, saya simpulkan seperti itu jadi bilangan negatif tidak ada yang memenuhi hanya bilangan positif 0 kecuali 1

P1.10.1.8 : kecuali 1?

S1.10.1.8 : iye

P1.10.1.9 : jadi bilangan real di atas 2 saja yang memenuhi?

S1.10.1.9 : iya

P1.10.1.10: tidak adami lagi setelah itu? Tidak ada lagi selain itu? Bilangan real?

S1.10.1.10: tidak ada

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 menjawab dengan benar namun belum lengkap bahwa nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$) adalah $a \geq 2$ atau $a = 0 \forall a \in \mathbb{R}$, dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai a satu persatu ke dalam pertidaksamaan di atas. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.10.1.1; S1.10.1.2, S1.10.1.3; S1.10.1.4 dan S1.10.1.7] atas pertanyaan [P1.10.1.1; P1.10.1.2, P1.10.1.3; P1.10.1.4 dan P1.10.1.7] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 10 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek pada jawaban soal nomor 10 adalah pemahaman instrumental..

Transkrip wawancara I nomor 11

P1.11.1.1 : ok, kita lanjut nomor 11, apakah kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu?

S1.11.1.1 : tidak kak

P1.11.1.2 : tidak selalu?

S1.11.1.2 : iya
 P1.11.1.3 : kapan dikatakan dia lebih besar, kapan dikatakan dia lebih kecil?
 S1.11.1.3 : kalo dia akan lebih besar e ... jika bilangan real itu bilangan bulat positif eh ... bilangan bulat bukan positif, bilangan bulat dan akan lebih lebih kecil
 P1.11.1.4 : kalo bisa dituliski
 S1.11.1.4 : kan kalo 2 pangkat 2 = 4 ... $2 < 4$... ini $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$
 P1.11.1.5 : jadi kesimpulannya apa?
 S1.11.1.5 : tidak ... tidak semua
 P1.11.1.6 : tidak semua? Jadi kapan dikatakan dia lebih kecil, kuadrat dari suatu bilangan real itu selalu, dia lebih kecil dari bilangan real itu dan kapan dikatakan lebih besar
 S1.11.1.6 : nanti ...
 P1.11.1.7 : coba ... kelompokkanki supaya anda lebih mudah mengklasifikasikan yang mana yang tidak berlaku yang mana yang berlaku
 S1.11.1.7 : bilangan bulat ... saya menyimpulkan kalo e ... dia akan lebih ... kuadrat dari suatu bilangan ... kuadrat dari suatu bilangan real lebih besar atau sama dengan bilangan real itu, jika dia bilangan bulat
 P1.11.1.8 : bilangan bulat apa?
 S1.11.1.8 : bilangan bulat saja
 P1.11.1.9 : tulis di situ, tolong tuliski supaya saya lebih mudah mengklasifikasikannya, berlaku jika ini ...
 S1.11.1.9 : (mengerjakan kembali)
 P1.11.1.10 : bilangan bulatnya itu dimulai dari mana?
 S1.11.1.10 : semuanya
 P1.11.1.11 : semua bilangan bulat?
 S1.11.1.11 : iye, positif 0, negatif
 P1.11.1.12 : jadi tolong kita bilang untuk setiap bilangan bulat, ...
 S1.11.1.12 : yah tidak ... aduh ... oh di sini tidak semua
 P1.11.1.13 : jadi pecahan positif saja? (melihat subjek menulis jawaban “pecahan positif”)
 S1.11.1.13 : iya
 P1.11.1.14 : jadi dimulai dari mana?
 S1.11.1.14 : dari ... yang penting lebih besar dari 0 kan kalo 0 sama dengan
 P1.11.1.15 : jadi di sini coba anda perjelas kembali hanya bilangan pecahan positif kan?
 S1.11.1.15 : iya

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 menjawab dengan benar bahwa kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan

real dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai satu persatu ke dalam pertidaksamaan tersebut sehingga memenuhi pertidaksamaan itu namun belum dapat menyelesaikan soal dengan mencari himpunan penyelesaian kedalam bentuk pertidaksamaan dan tidak dapat mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku pada soal. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.11.1.3; S1.11.1.4; S1.11.1.5; S1.11.1.7; S1.11.1.10 dan S1.11.1.14] atas pertanyaan [P1.11.1.3; P1.11.1.4; P1.11.1.5; P1.11.1.7; P1.11.1.10 dan P1.11.1.14] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 11 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 11 adalah pemahaman instrumental.

Transkrip wawancara I nomor 12

- P1.12.1.1 : (setelah pewawancara melihat hasil pekerjaan subjek pada nomor 12), apakah akar dari bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu?
- S1.12.1.1 : tidak
- P1.12.1.2 : tidak?
- S1.12.1.2 : contohnya ... ini
- P1.12.1.3 : alasannya dulu ... (setelah melihat hasil pekerjaannya pewawancara membaca jawaban subjek bahwa “tidak semua”) tidak semua?
- S1.12.1.3 : iye
- P1.12.1.4 : hanya untuk nilai itu saja? (melihat $\sqrt{9}$ sebagai hasil pekerjaan subjek)
- S1.12.1.4 : $\sqrt{9}$
- P1.12.1.5 : berlaku hanya untuk itu saja? Sama tadi dengan nomor 11, coba anda e ... klasifikasikan yang mana yang berlaku, yang mana yang tidak berlaku atau hanya itu saja?

- S1.12.1.5 : akar dari bilangan positif inikan $\frac{1}{2}$, ... cocokmi tidak kak, bilangan pecahan itu tidak, karna kan kalo diambil $\frac{1}{4}$ hasilnya $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ kan $>$ dari $\frac{1}{4}$ terus
- P1.12.1.6 : coba lagi dituliskankembali seperti nomor 11
- S1.12.1.6 : yang begini kak
- P1.12.1.7 : He em, supaya lebih jelas klasifikasinya
- S1.12.1.7 : (menulis)
- P1.12.1.8 : jika bilangan tersebut bilangan bulat tak negatif berarti semua bilangan positif
- S1.12.1.8 : Iye
- P1.12.1.9 : Bilangan bulat positif yah?
- S1.12.1.9 : Iya
- P1.12.1.10 : jadi tidak masuk 0?
- S1.12.1.10 : Masuk
- P1.12.1.11 : Oh masuk 0?
- S1.12.1.11 : Iye
- P1.12.1.12 : tak negatif yah 0 plus bilangan bulat positif
- S1.12.1.12 : 0 ... iya
- P1.12.1.13 : sedangkan kalo lebih besar atau sama dengan bilangan real itu jika bilangan tersebut bilangan pecahan positif yang lebih besar dari 0 ... itu saja
- S1.12.1.13 : iya

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 menjawab dengan benar bahwa akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai satu persatu ke dalam pertidaksamaan tersebut sehingga memenuhi pertidaksamaan itu namun belum dapat menyelesaikan soal dengan mencari himpunan penyelesaian kedalam bentuk pertidaksamaan dan tidak dapat mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku pada soal. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.12.1.1; S1.12.1.5; S1.12.1.11 dan S1.12.1.13] atas pertanyaan [P1.12.1.1; P1.12.1.5; P1.12.1.11 dan P1.12.1.13] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 12 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

• **Pemahaman terhadap Materi Sifat Aljabar pada Bilangan Real.**

Transkrip wawancara 2 nomor 13

- P1.13.2.1 : ok wawancara ketiga mengenai materi sifat aljabar pada bilangan real, coba jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $-(a + b) = (-a) + (-b)$. Buktikan!
- S1.13.2.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit)
- P1.13.2.2 : ya, coba anda jelaskan
- S1.13.2.2 : jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $-(a + b) = (-a) + (-b)$, untuk membuktikannya yang pertama menurut teorema $(-1)p = -p$ maka ... e ...teorema yang saya gunakan itu $(-1)p = -p$ maka untuk menggunakan itu saya misalkan lagi p itu $= a + b$
- P1.13.2.3 : mengapa anda memisalkan $p = a + b$?
- S1.13.2.3 : karna yang akan dibuktikan akan dicariikan atau simbol-simbol yang digunakan di sini $a + b$
- P1.13.2.4 : $a + b$?
- S1.13.2.4 : iye
- P1.13.2.5 : anda mengambil $p = a + b$?
- S1.13.2.5 : iye
- P1.13.2.6 : trus
- S1.13.2.6 : trus substitusi nilai p ini keteorema tadi menghasilkan $-1(a + b) = -(a + b)$ kemudian ... , jadi $-(a + b) = -1(a + b)$
- P1.13.2.7 : ini menurut apa ini?
- S1.13.2.7 : teorema
- P1.13.2.8 : teorema itu?
- S1.13.2.8 : yang ini (menunjuk $-1(p) = -p$)
- P1.13.2.9 : trus ...
- S1.13.2.9 : trus saya distributifkan
- P1.13.2.10 : distributif apa? Distributif saja
- S1.13.2.10 : perkalian terhadap penjumlahan ...
- P1.13.2.11 : distributif perkalian terhadap penjumlahan, diapakan kalo distributif itu?
- S1.13.2.11 : diuraikan, jadi saya uraikan $-1(a) + -1(b)$ nah kembali lagi ke teorema tadi
- P1.13.2.12 : ya
- S1.13.2.12 : dihasilkan $(-a) + (-b)$, jadi $-(a + b) = (-a) + (-b)$ terbukti.

- P1.13.2.13 : ya, ini kan tadi ada teorema $(-1)p = -p$ di mana teorema itu didapat dari, apa ... maksud saya apa yang dimaksud teorema?
- S1.13.2.13 : teorema ... nda tau pengertiannya kak, yang saya tau itu kalo teorema harus dibuktikan
- P1.13.2.14 : harus dibuktikan?
- S1.13.2.14 : iye
- P1.13.2.15 : apanya yang harus dibuktikan?
- S1.13.2.15 : ini teoremanya $(-1)p$ itu apakah betul-betul sama dengan $-p$?
- P1.13.2.16 : sudah dibuktikan itu $(-1)p = -p$
- S1.13.2.16 : iye
- P1.13.2.17 : sudah? Di mana dibuktikan?
- S1.13.2.17 : di kelas
- P1.13.2.18 : dikelas?
- S1.13.2.18 : iye
- P1.13.2.19 : terbukti?
- S1.13.2.19 : iye

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 menjawab dengan benar dengan langkah yang tepat dan alasan yang jelas yaitu menggunakan teorema $-1(p) = (-p)$ dengan memisalkan $p = a + b$ lalu menggunakan sifat distributif penjumlahan terhadap perkalian. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.13.2.2; S1.13.2.3; S1.13.2.5; S1.13.2.6; S1.13.2.7; S1.13.2.8; S1.13.2.9; S1.13.2.10; S1.13.2.11; S1.13.2.12] atas pertanyaan [P1.13.2.2; P1.13.2.3; P1.13.2.5; P1.13.2.6; P1.13.2.7; P1.13.2.8; P1.13.2.9; P1.13.2.10; P1.13.2.11; P1.13.2.12] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 13 pada materi sifat aljabar pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 13 adalah pemahaman formal

Transkrip wawancara 2 nomor 14

- P1.14.2.1 : untuk pertanyaan kedua, tentukan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan berikut melalui langkah-langkah yang disertai alasan, mengapa langkah itu ditempuh (alasan dapat berupa aksioma, sifat, definisi atau teorema yang sesuai), soalnya $3\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 4\left(3x - \frac{1}{2}\right)!$
- S1.14.2.1 : (subjek mengerjakan soal dalam beberapa menit), (setelah mengerjakannya) jadi untuk menyelesaikannya yang pertama kan soalnya persamaannya itu $3\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 4\left(3x - \frac{1}{2}\right)$, nah kemudian didistributifkan atau diuraikan $3 \cdot (2x) + 3 \cdot \frac{1}{3} = 4 \cdot (3x) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot (2x) \dots 6x + 3 \cdot \frac{1}{3} \text{ e } \dots$ itu dari aksioma $M_4 = 1, \dots 4 \cdot (3x) \dots 12x \dots 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \dots -2 \dots 6x + 1 \text{ e } \dots$ kedua ruas kemudian kedua ruas ditambahkan dengan -1 jadi tambah $-1 \dots 12x - 2 + (-1)$ kemudian saya kelompokkan $(1 + (-1)) \dots \text{e } \dots$ sesuai aksioma \dots aksioma A_2 , lanjut $6x \dots (1 + (-1))$ itu sesuai dengan A_4 itu $= 0 \dots = 12$ lanjut $6x + 0 = 6x$ sesuai dengan aksioma A_3 kemudian kedua ruas lagi saya jumlahkan $(-12x)$ menghasilkan $6x + (-12x) = 12x + (-12x) - 3$ kemudian saya jumlahkan ini aljabar \dots operasi aljabar $6x + (-12x) = -6x$, kemudian saya kelompokkan lagi $12x + (-12x)$ saya kelompokkan $\text{e } \dots$ Sesuai dengan A_2 kemudian $12x + (-12x)$ itu sesuai aksioma $4 = 0$, trus $0 + (-3)$ sesuai aksioma A_3 itu -3 , selanjutnya kedua ruas saya kalikan dengan $-\frac{1}{6} \dots \text{e } \dots$ dari $M_4 \quad -\frac{1}{6} \times 6 = 1, x = (-3)(-1)\frac{1}{6} = \frac{3}{6}, 1.x$ itu aksioma $M_3 = x = \dots$ jadi nilai x yang memenuhi adalah $\frac{3}{6}$,
- P1.14.2.2 : $\frac{3}{6}$?
- S1.14.2.2 : iye
- P1.14.2.3 : iye, tunggu dulu, saya mau lihat dulu, pada baris kedua penyelesaiannya yah
- S1.14.2.3 : iye,
- P1.14.2.4 : kan $3 \cdot (2x) = 6x$, coba kita lihat $(2x)$ -nya itu $3 \cdot (2x)$ apakah langsung $= 6x$?
- S1.14.2.4 : tidak. digabungkan lagi antara 3 dengan 2,
- P1.14.2.5 : oh jadi ada angka yang hilang?
- S1.14.2.5 : iye, ada
- P1.14.2.6 : apa itu?

S1.14.2.6 : (menulis/memperbaiki hasil pekerjaannya)
 P1.14.2.7 : oh ya, begitu ya? Kenapa tadi ditulis seperti itu?
 S1.14.2.7 : yang mana kak?
 P1.14.2.8 : yang ini (menunjuk)
 S1.14.2.8 : ya, $6x$, kenapa langsung ... langsung $6x$ tadi, langsung saya kalikan
 P1.14.2.9 : langsung dikalikan?
 S1.14.2.9 : saya lupa jalannya tadi
 P1.14.2.10 : dilupa ya?
 S1.14.2.10 : iye
 P1.14.2.11 : trus pada langkah ke .. kedua ruas ditambah dengan -1
 S1.14.2.11 : yang ini?
 P1.14.2.12 : yah $(6x + 1) + (-1)$, itu merupakan apa?
 S1.14.2.12 : si ... itu ... itu yang kulupa ... operasi penjumlahan eh ...
 P1.14.2.13 : kan ini M_4, A_2, A_4 , apa itu?
 S1.14.2.13 : aksioma
 P1.14.2.14 : aksioma apa?
 S1.14.2.14 : aksioma lapangan
 P1.14.2.15 : lapangan? Ada berapa itu aksioma lapangan?
 S1.14.2.15 : 9
 P1.14.2.16 : sedangkan ini yang baris ke-4?
 S1.14.2.16 : itu kedua ruas dijumlahkan ...
 P1.14.2.17 : kan di sini anda menulis kedua ruas ditambah dengan -1 , itu adalah apa?
 S1.14.2.17 : apalagi itu namanya? ... (berpikir) ... e ... sifat
 P1.14.2.18 : jadi sifat apa tadi?
 S1.14.2.18 : sifat operasi penjumlahan pada bilangan real
 P1.14.2.19 : sifat operasi penjumlahan pada bilangan real?
 S1.14.2.19 : iye baru ingat
 P1.14.2.20 : kemudian pada baris ke ... kan itu bisa anda mengatakan M_4 itu apa isinya?
 S1.14.2.20 : M_4 yang manami itu? M_4 untuk setiap M_4 itu $a \times \frac{1}{a}$, $a \neq 0$,

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$$

 P1.14.2.21 : yang mana yang menunjukkan M_4 di sini?
 S1.14.2.21 : ini (menunjuk) $3 \times \dots$
 P1.14.2.22 : $\frac{1}{3}$?
 S1.14.2.22 : iya
 P1.14.2.23 : oh $\frac{1}{3}$ jadi hasilnya 1?
 S1.14.2.23 : iye
 P1.14.2.24 : kalo begitu pada baris kedua yah
 S1.14.2.24 : (mengerjakan)

P1.14.2.25 : ini tadi $3 \cdot 2 \cdot x$ itu apa?
 S1.14.2.25 : kelompok
 P1.14.2.26 : mengelompokkan?
 S1.14.2.26 : iye, apa disitu M_2
 P1.14.2.27 : kemudian ... e ...itu $6x + 1$ kan tambah -1 , ini diapakan ini apa disitu A_2 , A_2 itu apa? Sifat apa? Atau aksioma apa?
 S1.14.2.27 : dikelompokkan pengelompokan asosiatif
 P1.14.2.28 : asosiatif pada apa?
 S1.14.2.28 : pada penjumlahan
 P1.14.2.29 : pada penjumlahan? Ok kemudian apa disitu $x + 0 \dots 1 + (-1)$ itu sifat $(1 + (-1))$
 S1.14.2.29 : ini A_4
 P1.14.2.30 : A_4 itu apa?
 S1.14.2.30 : ... e ... $a + (-a) = 0$
 P1.14.2.31 : apa namanya itu $a + (-a) = 0$
 S1.14.2.31 : identitas ... eh invers
 P1.14.2.32 : invers pada?
 S1.14.2.32 : penjumlahan
 P1.14.2.33 : ok $6x + 0$?
 S1.14.2.33 : e ... identitas
 P1.14.2.34 : $6x + 0$ identitas?
 S1.14.2.34 : iye
 P1.14.2.35 : isinya itu apa? Sifat apa? Aksioma ke?
 S1.14.2.35 : A_3
 P1.14.2.36 : A_3 ?
 S1.14.2.36 : iye aksioma
 P1.14.2.37 : apa bunyinya A_3 itu?
 S1.14.2.37 : e ... $a + 0 = 0 + a = a$
 P1.14.2.38 : kemudian $6x + 12x$ eh ... $6x + (-12x)$, kan di sini disebut kedua ruas di... apa ini?
 S1.14.2.38 : ditambah
 P1.14.2.39 : ditambah ya?
 S1.14.2.39 : iye
 P1.14.2.40 : ditambah dengan $(-12x)$ itu, apa itu?
 S1.14.2.40 : sifat operasi penjumlahan pada bilangan real
 P1.14.2.41 : sifat operasi penjumlahan pada bilangan real? Bisa ditulis yah supaya lebih jelas lagi, hasilnya $-6x + \dots 6x - 12x$ yah hasilnya itu lagi $-\frac{1}{6}$ kan di sini dikatakan ke dua ruas dikali dengan $-\frac{1}{6}$
 S1.14.2.41 : iya
 P1.14.2.42 : apa itu maksudnya?
 S1.14.2.42 : sifat operasi perkalian pada bilangan real
 P1.14.2.43 : sifat operasi perkalian pada bilangan real?

S1.14.2.43 : iye

P1.14.2.44 : kemudian kenapa tiba-tiba ini $(-6 \times (-\frac{1}{6}))$ maksud saya kenapa tiba-tiba bentuknya dari $(-6x)$ ke $(\frac{1}{6}) \times (-6)$

S1.14.2.44 : (berpikir) terbalikki caraku ... tunggu dulu di' penulisannya terbalikki

P1.14.2.45 : M_2 ?

S1.14.2.45 : iye

P1.14.2.46 : M_2 itu apa?

S1.14.2.46 : e ... asosiatif pada perkalian

P1.14.2.47 : asosiatif pada perkalian?

S1.13.2.47 : iye

P1.14.2.48 : oh ya kemudian itu $(-\frac{1}{6}) \times (-6)$ kenapa bisa 1, langsung anda simpulkan bahwa 1

S1.13.2.48 : kan ada teorema $(-1) \times (-1) = 1$, trus saya pakai itu dulu yang ini untuk supaya ini toh ... supaya nda adaki minusnya, trus ambil lagi M_4

P1.14.2.49 : coba ... coba jelaskan dari $(-\frac{1}{6})$ dengan (-6) , kenapa tiba-tiba menjadi 1

S1.14.2.49 : wah dari ini saja kak M_4 dari M_4 , kan kalo M_4 itu $\frac{1}{a} \times a = 1$, nah saya andaikan a itu $= -6$, $(-\frac{1}{6}) \times (-6) = 1$

P1.14.2.50 : jadi pada aksioma berapa itu?

S1.14.2.50 : M_4

P1.14.2.51 : Oh ya ... ya, ok terima kasih

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 menjawab dengan benar soal tersebut dengan langkah-langkah yang sistematis dan alasan yang jelas. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.14.2.1; S1.14.2.4; S1.14.2.13; S1.14.2.14; S1.14.2.18; S1.14.2.20; S1.14.2.25; S1.14.2.26; S1.14.2.27; S1.14.2.28; S1.14.2.30; S1.14.2.31; S1.14.2.32; S1.14.2.33; S1.14.2.37; S1.14.2.40; S1.14.2.42; S1.14.2.44; S1.14.2.45; S1.14.2.46; S1.14.2.48 dan S1.14.2.49] atas pertanyaan [P1.14.2.1; P1.14.2.4; P1.14.2.13; P1.14.2.14; P1.14.2.18; P1.14.2.20; P1.14.2.25; P1.14.2.26; P1.14.2.27; P1.14.2.28; P1.14.2.30; P1.14.2.31; P1.14.2.32; P1.14.2.33; P1.14.2.37;

P1.14.2.40; P1.14.2.42; P1.14.2.44; P1.14.2.45; P1.14.2.46; P1.14.2.48 dan P1.14.2.49] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 14 pada materi sifat aljabar pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal adalah pemahaman formal.

- **Pemahaman terhadap Materi Pembuktian Bilangan Rasional**

Transkrip wawancara 3 nomor 15

- P1.15.3.1 : e ... kan $\sqrt{21}$ mau dibuktikan, buktikan bahwa $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional? ... mmm ... Bagaimana cara anda membuktikannya?
- S1.15.3.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit) $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional, cara pembuktiannya ... e ... yang pertama itu saya misalkan dulu $\sqrt{21}$ itu sebagai t , kemudian saya kuadratkan. Jadi $t^2 = 21$
- P1.15.3.2 : mengapa dikuadratkan?
- S1.15.3.2 : e ... supaya e... ini jadi bilangan rasional, iya karna t itu saya umpama, saya misalkan lagi adalah bilangan rasional
- P1.15.3.3 : t misalkan bilangan rasional?
- S1.15.3.3 : iya
- P1.15.3.4 : mengapa anda memisalkan bahwa t adalah bilangan rasional?
- S1.15.3.4 : eh ... sesuai dengan ini ... karna kan saya mau buktikan apakah $\sqrt{21}$ itu bukan bilangan rasional, jadi saya buktikan dulu apakah ... kalo memang dia bukan bilangan ... eh misalkan pake bilangan rasional saja dulu untuk membuktikan apakah dia bukan atau iya.
- P1.15.3.5 : kenapa tidak pakai bilangan lain? Atau kenapa tidak langsung $\sqrt{21}$ itu dimisalkan bilangan irrasional saja?
- S1.15.3.5 : tidak, karna dari sini kak, dari bilangan rasional ... dari soalnya
- P1.15.3.6 : dari soalnya?
- S1.15.3.6 : iya $\sqrt{21}$ bukan rasional
- P1.15.3.7 : mengapa memisalkan t -nya itu langsung bilangan rasional? Itu kan pertanyaan saya, mengapa t-nya langsung anda katakan memisalkan sebagai t adalah bilangan rasional?
- S1.15.3.7 : iya, kan yang mau dibuktikan itu dia mengatakan bahwa buktikan $\sqrt{21}$ itu bukan bilangan rasional, jadi saya umpamakan dulu apakah

mungkin ... e ... t ini adalah bilangan rasional, jadi kalo seandainya dia bilangan rasional maka ini salah, pengandaian.

P1.15.3.8 : apa? Apa tadi? Pengandaian?

S1.15.3.8 : iye

P1.15.3.9 : kenapa dengan pengandaian?

S1.15.3.9 : kalo misalnya t kan ... saya misalkan t adalah bilangan rasional nah jika dia ... e ... $\sqrt{21}$ kan saya misalkan juga $\sqrt{21}$ itu ini $\sqrt{21} = t$, dimana t itu adalah bilangan rasional, nah seandainya setelah saya membuktikan dan saya mendapatkan ternyata t itu benar-benar bilangan rasional maka pengandaian saya benar.

P1.15.3.10 : oh... jadi anda mengambil e ... cara yaitu dengan cara mengandaikan?

S1.15.3.10 : iye

P1.15.3.11 : apakah semua teorema atautkah soal Anda buktikan dengan begitu, dengan pengandaian?

S1.15.3.11 : tidak

P1.15.3.12 : tidak?

S1.15.3.12 : iya

P1.15.3.13 : jadi kan tidak ... bagaimana Anda bisa mengambil satu cara yang , maksud saya begini, Anda langsung mengambil ... mengambil pembuktian pengandaian kan begitu, kenapa dengan soal ini anda ambil pengandaian?

S1.15.3.13 : saya menggunakan pembuktian tidak langsung

P1.15.3.14 : pembuktian tidak langsung? Mengapa Anda mengambil pembuktian tidak langsung? Apa dulu itu pembuktian tidak langsung?

S1.15.3.14 : dia tidak langsung merujuk pada apa yang akan dibuktikan

P1.15.3.15 : ... , mengapa bukan langsung dibuktikan bukan bilangan rasional

S1.15.3.15 : karna ...

P1.15.3.16 : mengapa anda tidak langsung membuktikan , buktikan saja langsung bahwa $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional, kenapa dengan menggunakan pengandaian lagi? Atau dengan kata lain anda menggunakan bukti tak langsung? Kenapa tidak menggunakan bukti langsung?

S1.15.3.16 : karna susah kak

P1.15.3.17 : karna susah menggunakan bukti langsung?

S1.15.3.17 : iya

P1.15.3.18 : jadi anda menggunakan bukti tak langsung? Oh jadi bukti tak langsung itu apa ciri-cirinya?

S1.15.3.18 : e ... menggunakan pengandaian trus apalagi ... e ... ini kan biasa pakai yang ini ... pakai bukan

P1.15.3.19 : kemudian?

S1.15.3.19 : ituji kak

P1.15.3.20 : ituji kamu tahu?

S1.15.3.20 : iye

P1.15.3.21 : kemudian apa guna dari pengandaian?

S1.15.3.21 : mempermudah

P1.15.3.22 : mempermudah? maksudnya mempermudah?

S1.15.3.22 : mempermudah dalam pencarian bukti

P1.15.3.23 : ya, coba ... coba anda jelaskan kembali!

S1.15.3.23 : e ... yang pertama itu, saya misalkan t adalah bilangan rasional kemudian t itu $= \sqrt{21}$ dimana ... atau bisa juga $t^2 = 21$, nah t kan bilangan rasional tadi jadi $t = \frac{a}{b}$, dengan ... e ... kan diketahui kalo t

P1.15.3.24 : t adalah bilangan rasional? $t = \frac{a}{b}$ itu saja?

S1.15.3.24 : $b - nya \neq 0$ atau $a, b \in \mathbb{Z}$, kemudian juga ada lagi satu (a, b) itu relatif prim ... e ... trus saya kuadratkan kedua ruas

P1.15.3.25 : mengapa dikuadratkan, mengapa anda kuadratkan?

S1.15.3.25 : untuk ini kak menggunakan t^2 tadi yang nilai tadi ...

P1.15.3.26 : mengapa tadi ini dikuadratkan? Saya lupa tadi di depan

S1.15.3.26 : untuk supaya jadiki bilangan rasional karna kan kalo dia cuman $t = \sqrt{21}$, maka dia tetap akan bilangan ... diketahui bilangan irrasional

P1.15.3.27 : jangan dulu, saya tanya dulu, *misal* dengan *andai* samakah? Tadi kan anda sebut kata ... kata andai sekarang tapi yang anda tulis misal, yang mana yang ... maksud saya, apakah kedua istilah ini sama?

S1.15.3.27 : misalkan, andaikan, kalo saya ... anuku kak, iya sama.

P1.15.3.28 : jadi pemisalan sama dengan pengandaian?

S1.15.3.28 : iya

P1.15.3.29 : apa alasannya?

S1.15.3.29 : samaji maksudnya

P1.15.3.30 : sama maksudnya?

S1.15.3.30 : iya

P1.15.3.31 : tapi kenapa di bawah pengandaian ?

S1.15.3.31 : itumi lagi kutulis salah

P1.15.3.32 : jadi bagaimana? Anda tetap dengan itu atau bagaimana?

S1.15.3.32 : pengandaian, gantimi kak di sini

P1.15.3.33: kenapa anda tidak menulis pemisalan? Kenapa tidak menulis pemisalan salah?

S1.15.3.33 : nda kutaui ... pemisalan, iya di'

P1.15.3.34 : jadi?

S1.15.3.34 : gantimika andai di sini

P1.15.3.35 : kenapa memilih andai lagi?

S1.15.3.35 : ka dari akhirki kuliat pengandaian salah

P1.15.3.36 : alasan lain? Mengapa tiba-tiba dari misal ke andai

S1.15.3.36 : salah tuliska barangkali

P1.15.3.37 : salah tulis barangkali?

S1.15.3.37 : tidak kak, nda kutau di anuji saja ... memisalkan ... mengandaikan

P1.15.3.38 : apakah andai dengan misal itu sama?

S1.15.3.38 : iya kak, menurutku

P1.15.3.39 : sama?

S1.15.3.39 : iya

P1.15.3.40 : ok, lanjut

S1.15.3.40 : jadi saya kuadratkan keduanya, jadi menghasilkan $t^2 = \frac{a^2}{b^2}$,

P1.15.3.41 : kenapa itu $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

S1.15.3.41 : eh ... kenapa, karna kan ini $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ sama saja kalo saya tulis $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$

P1.15.3.42 : jadi hasilnya seperti itu?

S1.15.3.42 : iye

P1.15.3.43 : eh ini atas dasar apa ini anda mengatakan seperti ini $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$?

S1.15.3.43 : perpangkatan kan perkalian berulang, jadi kan kalau $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ itu sama
saja kalo saya tulis $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$

P1.15.3.44 : iya, saya tau perkalian berulang, tapi di mana anda ambil dasar
begini?

S1.15.3.44 : ini? (menunjuk $\left(\frac{a}{b}\right)^2$)

P1.15.3.45 : iya

...

S1.15.3.46 : pengertiannya kak perpangkatan

P1.15.3.47 : pengertian dari perpangkatan?

S1.15.3.47 : iye, perkalian berulang

...

S1.15.3.52 : jadi saya substitusi nilai t^2 kan tadi sudah diketahui $t^2 = 21 = \frac{a^2}{b^2}$,
trus $a^2 = 21 b^2$

P1.15.3.53 : kenapa tiba-tiba itu menjadi $21 = \frac{a^2}{b^2}$

S1.15.3.53 : ini kak (menunjuk $21 = \frac{a^2}{b^2}$)?

P1.15.3.54 : ya, kenapa bisa $21 = \frac{a^2}{b^2}$

S1.15.3.54 : kedua ruas dikalikan b^2

P1.15.3.55 : kedua ruas dikalikan b^2 ? Nda ... nda dari sini dulu ke sini, kenapa
bisa?

S1.15.3.55 : oh dari sini ke sini?

P1.15.3.56 : iya

S1.15.3.56 : yang ini kak, 21 itu saya ambil dari sini tadi disubstitusi kan ini t^2

P1.15.3.57 : apa? Diapakan?

S1.15.3.57 : disubstitusi

P1.15.3.58 : disubstitusi nilainya?

S1.15.3.58 : iya

P1.15.3.59 : trus?

S1.15.3.59 : $21 = \frac{a^2}{b^2}$, kemudian kedua ruas dikalikan dengan b^2 , menghasilkan
itu $a^2 = 21 b^2$

P1.15.3.60 : ya, trus kenapa dari itu ... dari sini ke sini tadi

S1.15.3.60 : inimi kak, kedua ruas dikalikan b^2 hasilnya

P1.15.3.61 : tidak ada yang lain? Begitu saja?

S1.15.3.61 : maksudnya?

P1.15.3.62 : Maksud saya b^2 hanya dikali dengan b^2 saja, sampai di sini saja

S1.15.3.62 : dijalankan sampai kesini kak

P1.15.3.63 : ya, maksud saya seperti ini, ini saja? Ya?

S1.15.3.63 : iya

P1.15.3.64 : ok trus trus lanjut

S1.15.3.64 : jadi kemudian karna a^2 kelipatan 1, 3, 7, 21 ... 1, 3, 7, 21 ini faktor dari 21

P1.15.3.65 : begini saya tanya dulu kan $a^2 = 21 b^2$, kenapa anda menyimpulkan bahwa a^2 juga kelipatan 1, 3, 7, 21?

S1.15.3.65 : karna kan kalo misalnya a^2 itu kan kelipatan 21, sudah tentu nah .. di kelipatan 21 ini ...

P1.15.3.66 : apanya yang sudah pasti? Apanya?

S1.15.3.66 : begini kak, a^2 itu kelipatan 21

P1.15.3.67 : mengapa dikatakan kelipatan 21?

S1.15.3.67 : karna ini dikali dengan 21

P1.15.3.68 : oh ya ... ya trus

S1.15.3.68 : trus ini kelipatan 1, 3, 7, 21 ... 1, 3, 7, 21 ini saya dapatkan dari faktor dari 21

P1.15.3.69 : sudah pasti itu jika faktornya maka dia juga kelipatan 21. Di mana anda dapat dasar?

S1.15.3.69 : itu yang kutahu, kalo kan ... kalo misalnya 3, kelipatan 3 itu ada dibagian 21 juga

P1.15.3.70 : ada juga di bagian 21?

S1.15.3.70 : iye kelipatan dari 21

P1.15.3.71 : e ... tunggu dulu ... kelipatan 3 ada pada ... coba diulangi tadi

S1.15.3.71 : iye

P1.15.3.72 : kelipatan 3 ...?

S1.15.3.72 : karna e ... misalnya kita ambil kelipatan 3, dia juga bagian dari kelipatan 21

P1.15.3.73 : bisa dikasih contoh?

S1.15.3.73 : langsung di atasmi kak misalnya itu kelipatan 3 langsung saja 21, 24
... trus 21(mengerjakan) begitu kak

P1.15.3.74 : trus apa yang bisa disimpulkan dari pernyataan yang anda tuliskan?

S1.15.3.74 : ada ... e ... keli ... ada kelipatan ... eh nilai dari kelipatan 3 itu
dikelipatan 21 juga

P1.15.3.75 : adalah kelipatan 21 juga? apa?

S1.15.3.75 : nilainya

P1.15.3.76 : nilainya (menunjuk) 21 dengan ini. Apa namanya kalo begitu?

S1.15.3.76 : faktor ... eh KPK

P1.15.3.77 : KPK?

S1.15.3.77 : tidak. Bukan kak, karna kalo 3 dan 21, KPK-nya itu 63

P1.15.3.78 : jadi kenapa 63? Apanya KPK-nya 63?

S1.15.3.78 : iye

P1.15.3.79 : kenapa dicari KPK-nya

S1.15.3.79 : nda ji. kan tadi saya bilang kalo ini KPK tapi saya pikir bukan karna
kan ini 21 awal trus ... oh iya yah 21 KPK-nya

P1.15.3.80 : jadi karna 21 KPK-nya, maka? Kenapa?

S1.15.3.80 : maka dia juga kelipatan

P1.15.3.81 : maka?

S1.15.3.81 : dia juga bagian dari ini? (menunjuk 21)

P1.15.3.82 : bagian dari ini?

S1.15.3.82 : iye

P1.15.3.83 : bagian apa? Coba dijelaskan maksudnya, diperbaiki kata-katanya,
maksud saya supaya memperjelas, tidak menimbulkan kebingungan
kalo kita mendengarkan pernyataannya

S1.15.3.83 : e ... kelipatan 1, 3, 7, 21, di sini 3 ini juga merupakan kelipatan dari
21

P1.15.3.84 : 3 merupakan kelipatan dari 21?

S1.15.3.84 : bagaimana itu ... kan tadi $a^2 = 21 b^2$, a^2 kelipatan 1, 3, 7, 21, ...
21 ini diperoleh dari faktor 21

P1.15.3.85 : apa yang dimaksud faktor dari 21?

S1.15.3.85 : yang habis membagi ini (menunjuk 1, 3, 7, 21)

P1.15.3.86 : habis?

S1.15.3.86 : membagi 21

P1.15.3.87 : habis membagi 21?

S1.15.3.87 : iye

P1.15.3.88 : trus

S1.15.3.88 : maka dapatlah 1, 3, 7, 21

P1.15.3.89 : lanjut

S1.15.3.89 : maka a juga kelipatan 1, 3, 7, 21

P1.15.3.90 : kenapa dari a^2 kelipatan 1, 3, 7, 21 bisa disimpulkan bahwa a juga
kelipatan 1, 3, 7, 21

S1.15.3.90 : karna ini kan kuadratnya kak, a kuadrat ... ini kan hasil kuadratnya jadi saya simpulkan seperti itu

P1.15.3.91 : jadi hasil kuadratnya?

S1.15.3.91 : iye

P1.15.3.92 : sehingga ... kan kalo dikuadratkan masing-masing dikuadratkan atau diakarkan

S1.15.3.92 : diakarkan

P1.15.3.93 : oh diakarkan, diakarkan masing-masing berarti ini menjadi kembali ke $\sqrt{21}$

S1.15.3.93 : yang ini diakarkan kak

P1.15.3.94 : kalo ini diakarkan menjadi?

S1.15.3.94 : $\sqrt{21}$

P1.15.3.95 : nda ini kan diakarkan a^2 diakarkan menjadi?

S1.15.3.95 : a

P1.15.3.96 : kemudian ini disebelahnya bagaimana

S1.15.3.96 : $b \dots \sqrt{21}$, iya di' (heran)

P1.15.3.97 : kenapa anda menyimpulkan a juga kelipatan 1, 3, 7, 21?

S1.15.3.97 : (mengerjakan) nda tau

P1.15.3.98 : jadi?

S1.15.3.98 : nda kutau itu kak

P1.15.3.99 : nda tau?

S1.15.3.99 : langsungji saja

P1.15.3.100 : oh iya trus kenapa e ... dibawahnya dijelaskan lagi?

S1.15.3.100 : kemudian ... e ... dapat dituliska $a = 21 k$

P1.15.3.101 : mengapa dituliskan $a = 21 k$?

S1.15.3.101 : a ini juga saya ambil dia sebagai kelipatan 21

P1.15.3.102 : iya a ?

S1.15.3.102 : kelipatan 21

...

P1.15.3.104 : Jadi dituliskan $a = 21 k$,

S1.15.3.104 : iye saya ambil ini toh k 21

P1.15.3.105 : kita ambil k ini 21-nya?, trus ini k kenapa 21 k ,

S1.15.3.105 : kan untuk membuktikan kalo a juga kelipatan 21, k ini bilangan bulat

P1.15.3.106 : k bilangan bulat?

S1.15.3.106 : iye

P1.15.3.107 : kenapa tidak ada ditulis?

S1.15.3.107 : (menulis) kemudian kedua ruas dikuadratkan

P1.15.3.108 : kenapa lagi dipangkatduakan?

S1.15.3.108 : mau ini nanti yang akan dicari lagi kak, apakah dia akan ...

P1.15.3.109 : nda, kita tidak menyinggung dulu b , kenapa a lagi dipangkatduakan

S1.15.3.109 : kan mauki menggunakan sifat kesamaan

P1.15.3.110 : menggunakan sifat kesamaan?

S1.15.3.110 : iye

P1.15.3.111 : untuk apa sifat kesamaan?

S1.15.3.111 : e ... sifat kesamaan ini digunakan nantinya akan menghasilkan b^2

P1.15.3.112 : menghasilkan b^2 ? Coba dijalankan

S1.15.3.112 : jadi $a^2 = 441 k^2$, dengan menggunakan sifat kesamaan, maka kesamaan antara ini $a^2 = 21 b^2$ dengan $a^2 = 441 k^2$ dan disamakan $21 b^2 = 441 k^2$ kemudian disederhanakan, kedua ruas dibagi dengan 21 maka dihasilkan $b^2 = 21 k^2$ dan b juga kelipatan 1, 3, 7, 21 samaji yang tadi a

P1.15.3.113 : mengapa b-nya kelipatan 1, 3, 7, 21?

S1.15.3.113 : samaji kak tidak tau

P1.15.3.114 : tidak tau?

S1.15.3.114 : iya

P1.15.3.115 : ok, kemudian?

S1.15.3.115 : disimpulkan bahwa pengandaian salah karna pada pengandaian (a,b) relatif prim

P1.15.3.116 : iya, ada tadi yang kelewatan yah a,b relatif prim, apa maksudnya a,b relatif prim?

S1.15.3.116 : a,b relatif prim itu maksudnya memiliki 1 faktor persekutuan yaitu 1

P1.15.3.117 : yaitu 1? Contohnya?

S1.15.3.117 : contohnya $\frac{2}{3}$ faktor persekutuannya 1

P1.15.3.118 : apa yang dimaksud faktor persekutuannya 1?

S1.15.3.118 : e ... faktor dari ... misalkan 2 dengan 3 ... eh kan faktor 2 ... 1 dengan 2 trus 3 ... 1 dengan 3, nah faktor persekutuannya itu atau faktor yang sama adalah 1. Faktor yang sama dari faktor mereka.

P1.15.3.119 : oh, begitu di? a,b relatif prim

S1.15.3.119 : akan tetapi yang dihasilkan (a,b) itu memiliki faktor 1, 3, 7 dan 21 dengan demikian, maka ini kan bukan relatif prim jadi itumi salah pengandaiannya, maka pernyataannya benar bahwa $\sqrt{21}$ itu bukan bilangan rasional

P1.15.3.120 : mengapa anda menyimpulkan bahwa pengandaiannya salah?

S1.15.3.120 : dari ini kak dari a,b relatif prim

P1.15.3.121 : e ... perbaiki cara ... perbaiki kata-katanya

S1.15.3.121 : disimpulkan bahwa pengandaian salah

P1.15.3.122 : yang mana itu pengandaian salah?

S1.15.3.122 : ini t adalah bilangan rasional

P1.15.3.123 : mengapa anda katakan salah?

S1.15.3.123 : t adalah bilangan rasional $t = \frac{a}{b}$, dimana a,b nya itu harus relatif prim, nah saya katakan salah karna e ... kan dipengandaian , saya

bilang a,b itu relatif prim, memiliki 1 faktor persekutuan yaitu 1 akan tetapi yang dihasilkan dari pembuktian tadi a,b nya itu memiliki faktor 1, 3, 7, dan 21

P1.15.3.124 : jadi?

S1.15.3.124 : jadi a,b ini bukan relatif prim

P1.15.3.125 : sehingga?

S1.15.3.125 : sehingga $\sqrt{21}$ itu bukan bilangan rasional

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 bisa menjawab dengan benar dan dapat memberikan alasan menggunakan bukti kontradiksi walaupun ada beberapa langkah yang masih membutuhkan penjelasan. Adapun langkah-langkah yang penjelasannya kurang tepat adalah:

- subjek menyamakan kata “memisalkan” dan “mengandaikan”.
- Dari langkah $a^2 = 21b^2$ dan $b^2 = 21k^2$ subjek mampu menjelaskan bahwa a^2 dan b^2 adalah kelipatan 21 namun tidak dapat menjelaskan mengapa a dan b juga merupakan kelipatan 21.

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.4.1.1; S1.4.1.2; S1.4.1.3; S1.4.1.5; S1.4.1.7; S1.4.1.21; S1.4.1.27; S1.4.1.28; S1.4.1.29; S1.4.1.30 dan S1.4.1.31] atas pertanyaan [P1.4.1.1; P1.4.1.2; P1.4.1.3; P1.4.1.5; P1.4.1.7; P1.4.1.21; P1.4.1.27; P1.4.1.28; P1.4.1.29; P1.4.1.30 dan P1.4.1.31] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara pada materi pembuktian bilangan rasional, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada materi tersebut adalah pemahaman relasional.

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Urutan Pada Bilangan Real.**

Transkrip wawancara 4 nomor 16

- P1.16.4.1 : yah wawancara keempat, jika $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $a < b$ dan $c < d$,
buktikan bahwa $ad + bc < ac + bd$!
- S1.16.4.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit)
- P1.16.4.2 : (setelah melihat hasil pekerjaan dari subjek) yah kan $a < b$ maka
 $b - a \in \mathbb{P}$, itu dasarnya apa?
- S1.16.4.2 : e ... sifat trikotomi ... eh iya
- P1.16.4.3 : apa isinya sifat trikotomi?
- S1.16.4.3 : $a < b, a = b, a > b$
- P1.16.4.4 : di sini kan menurut anuta eh ... soal ... eh ... ujian tulisannya
 $a < b$ toh
- S1.16.4.4 : definisi (sambil membaca ujian tulisannya)
- P1.16.4.5 : iya, definisi
- S1.16.4.5 : aduh ...
- P1.16.4.6 : apa yang ... maksud saya ... e ... sifat trikotomi tadi yang anda
bilang atau definisi?
- S1.16.4.6 : oh, defi ... apakah itu isinya sifat trikotomi? Apa itu ... sifat ...
apa ... definisi? ... definisi kak
- P1.16.4.7 : definisi?
- S1.16.4.7 : Iye.
- P1.16.4.8 : jadi tadi, sifat trikotomi itu apa?
- S1.16.4.8 : diralatmi kak
- P1.16.4.9 : diralat?
- S1.16.4.9 : iye
- P1.16.4.10 : disini kan jika maka, kalo disini jika dan hanya jika, yang mana
yang betul?
- S1.16.4.10 : yang mana?
- P1.16.4.11 : kalo diujian tulisannya maya, itu jika ... maka ... eh jika dan hanya
jika, kalo di sini jika ... maka, bagaimana? Apa yang betul?
- S1.16.4.11 : jika dan hanya jika artinya dia timbal balik ... e ... bisa dari ruas
kanan ke kiri benar juga dari kiri ke kanan
- P1.16.4.12 : seperti itu?
- S1.16.4.12 : iye. $b - a$ itu jika dan hanya jika $a < b$
- P1.16.4.13 : apa tadi alasannya memakai jika maka?
- S1.16.4.13 : timbal balik ... eh ... timbal balik iya
- P1.16.4.14 : jika maka tadi awalnya kan, mengapa anda ...?
- S1.16.4.14 : tidakji kak, saya kira tidak diperhatikanji itu ... he ...he ... (ketawa)
- P1.16.4.15 : kemudian tiba-tiba lagi karna mendengarkan ujian tulisannya seperti
ini mengikut lagi ke ujian tulisannya, yang mana yang benar?

S1.16.4.15 : tidak kak, saya kira tadi nda dipertanyakanji yang ininya ... he ... he ... jadi saya maksudku juga seperti itu tapi ternyata diperhatikanji juga

P1.16.4.16 : oh ya, yang di bawah juga $c < d$ itu jika dan hanya jika $d - c \in P$, itu apa lagi?

S1.16.4.16 : definisi

P1.16.4.17 : apakah bunyi definisinya itu kalo bisa saya tahu? Masih ingat bunyi definisinya?

S1.16.4.17 : itu kan kalo misalnya $a - b = -$, $a < b$ itu $= -a + b$, begitu kak

P1.16.4.18 : $-a + b$? Kemudian?

S1.16.4.18 : kemudian, jadi $b - a$

P1.16.4.19 : $b - a$?

S1.16.4.19 : iye

P1.16.4.20 : elemen P? (sambil melihat tulisan subjek)

S1.16.4.20 : iye

P1.16.4.21 : P itu apakah?

S1.16.4.21 : e ... anu kayak himpunan

P1.16.4.22 : himpunan? himpunan apa?

S1.16.4.22 : himpunan bilangan

P1.16.4.23 : himpunan bilangan apa?

S1.16.4.23 : bilangan real

P1.16.4.24 : himpunan bilangan real?

S1.16.4.24 : iye

P1.16.4.25 : kenapa tidak langsung ditulis \mathbb{R} saja (simbol bilangan real)? Kenapa harus P?

S1.16.4.25 : karena tidak semuanya mungkin

P1.16.4.26 : tidak semuanya?

S1.16.4.26 : iye

P1.16.4.27 : kan sudah ada jelas bahwa simbolnya bilangan real kan itu \mathbb{R} kenapa tidak ditulis \mathbb{R} saja di situ?

S1.16.4.27 : karna tidak semua ... eh ... bilangan real ini hanya sebagian dari bilangan real

P1.16.4.28 : oh, jadi P itu apa?

S1.16.4.28 : himpunan bagian

P1.16.4.29 : himpunan bagian?

S1.16.4.29 : iya

P1.16.4.30 : dari bilangan apa?

S1.16.4.30 : real

P1.16.4.31 : P sendiri itu apa?

S1.16.4.31 : nda tau

P1.16.4.32 : nda tau?

S1.16.4.32 : disimbolji saja kak, saya umpamakan saja P itu himpunan bagian dari R

P1.16.4.33 : ok, pertanyaan selanjutnya kenapa dikali?

S1.16.4.33 : untuk menghasilkan ini di ... yang akan dibuktikan, karna kan kalo dijumlahkan, tidak menghasilkan seperti itu (sambil menunjuk soal)

P1.16.4.34 : tidak menghasilkan seperti itu?

S1.16.4.34 : iye

P1.16.4.35 : ada alasan lain?

S1.16.4.35 : tidak

P1.16.4.36 : kemudian kenapa lagi jika dikali elemen P

S1.16.4.36 : kan kalo ini elemen P dengan elemen P, ini kan masih himpunan bilangan P, ini juga nah kalo dikalikan itu pasti dia tetap masih ada dalam himpunan elemen P

P1.16.4.37 : himpunan yang sama?

S1.16.4.37 : iye

P1.16.4.38 : masih ada pada elemen P?

S1.16.4.38 : iye

P1.16.4.39 : mengapa? Atas dasar apa?

S1.16.4.39 : perkalian ... ituji kak, itumi jika 2 buah bilangan P dikalikan maka dia akan tetap himpunan P.

P1.16.4.40 : apa dasarnya?

S1.16.4.40 : dasar apanya kak?

P1.16.4.41 : maksudku ... e ... mengapa anda bisa langsung mengatakan seperti itu? Apakah itu pendapat? Atau apa?

S1.16.4.41 : nda kutauki, pendapat ... itu bisa kak jadi pendapat

P1.16.4.42 : jadi pendapat?

S1.16.4.42 : iya

P1.16.4.43 : pendapat anda?

S1.16.4.43 : iye, misalnya kalo dikalikan ... (berpikir dan melihat kembali)

P1.16.4.44 : ok lanjut

S1.16.4.44 : dikalikan hasilnya bd trus $-bc$, $-ad$, trus ac

P1.16.4.45 : kenapa bisa begini dari sini ke sini (menunjuk)

S1.16.4.45 : didistributifkan

P1.16.4.46 : oh iya coba ditulis

S1.16.4.46 : dituliskan?

P1.16.4.47 : iya. Kan Tadi sudah dibilang bahwa setiap langkah ada alasan

S1.16.4.47 : (mengerjakan)

P1.16.4.48 : sifat apa lagi namanya?

S1.16.4.48 : distributif

P1.16.4.49 : distributif apa?

S1.16.4.49 : perkalian terhadap penjumlahan

P1.16.4.50 : ok trus lanjut

S1.16.4.50 : selanjutnya didistributifkan lagi jadinya itu $bd + b(-c) \dots (-a)d + (-a)(-c)$, nah untuk ini teorema $(-1)p = -p$ ini juga , trus yang ini $(-1)(-1) = 1$

P1.16.4.51 : $(-1)(-1)$?

S1.16.4.51 : $= 1$... positif

P1.16.4.52 : tapi ini kan $(-a)(-c)$ belum tentu dia 1 saja

S1.16.4.52 : iya

P1.16.4.53 : kenapa langsung anda menyimpulkan bahwa positif ac ?

S1.16.4.53 : dari itu kak, teorema tadi

P1.16.4.54 : teorema tadi?

S1.16.4.54 : iye

P1.16.4.55 : yang mana, ya coba ... coba di sini ditulis kembali $(-a)(-c)$, dimana teoremanya?

S1.16.4.55 : $(-a)(-c) = ac$, dibuktikan ini kak?

P1.16.4.56 : iya buktikan

S1.16.4.56 : (mengerjakan)

P1.16.4.57 : (melihat hasil pekerjaan subjek) oh ... jadi seperti ini?

S1.16.4.57 : iya kak

P1.16.4.58 : jadi $(-1)(-1) = 1$? Apa itu?

S1.16.4.58 : teorema

P1.16.4.59 : sudah dibuktikan?

S1.16.4.59 : sudah

P1.16.4.60 : lanjut

S1.16.4.60:trus dikelompokkan $bd + ac - ad - bc$, kemudian dikelompokkan lagi yang $ad + bc$ itu didistributifkan -1 di sini jadinya itu seperti ini

P1.16.4.61 : didistributifkan?

S1.16.4.61 : iye, yang ini

P1.16.4.62 : jadi di sini 1 kali 1 kali $ad+bc$

S1.16.4.62 : iye, (-1) kali $ad + bc$, trus seperti ini sesuai dengan definisi tadi kan kalo dikurang hasilnya maka saya tulis seperti ini $bd + ac > ad + bc$, trus itu sama saja dengan $ad + bc < ac + bd \dots$ terbukti.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 dapat membuktikan soal nomor 1 dengan langkah-langkah pembuktian yang tepat walaupun dengan alasan yang kurang jelas dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.16.4.2; S1.16.4.3; S1.16.4.4; S1.16.4.8; S1.16.4.9; S1.16.4.11; S1.16.4.12; S1.16.4.17; S1.16.4.18; S1.16.4.20; S1.16.4.21; S1.16.4.22; S1.16.4.23; S1.16.4.25; S1.16.4.27;

S1.16.4.33; S1.16.4.36; S1.16.4.39; S1.16.4.41; S1.16.4.45; S1.16.4.48; S1.16.4.49; S1.16.4.50; S1.16.4.52; S1.16.4.53; S1.16.4.55; S1.16.4.57; S1.16.4.58; S1.16.4.60; S1.16.4.61 dan S1.16.4.62;] atas pertanyaan [P1.16.4.2; P1.16.4.3; P1.16.4.4; P1.16.4.8; P1.16.4.9; P1.16.4.11; P1.16.4.12; P1.16.4.17; P1.16.4.18; P1.16.4.20; P1.16.4.21; P1.16.4.22; P1.16.4.23; P1.16.4.25; P1.16.4.27; P1.16.4.33; P1.16.4.36; P1.16.4.39; P1.16.4.41; P1.16.4.45; P1.16.4.48; P1.16.4.49; P1.16.4.50; P1.16.4.52; P1.16.4.53; P1.16.4.55; P1.16.4.57; P1.16.4.58; P1.16.4.60; P1.16.4.61 dan P1.16.4.62;] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 16 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 4 nomor 17

P1.17.4.1 : ok, soal nomor 2, tentukan semua bilangan real x pada pertidaksamaan berikut melalui langkah-langkah yang disertai alasan, mengapa langkah itu ditempuh (alasan dapat berupa aksioma, sifat, definisi atau teorema yang sesuai) kemudian soalnya adalah $1 < x^2 < 4$!

S1.17.4.1 : ituji kak

P1.17.4.2 : ya, ituji

S1.17.4.2 : (subjek mengerjakan soal beberapa menit)

P1.17.4.3 : e .. yang saya tanyakan dulu di sini ,kan $1 < x^2 < 4$, kenapa langsung ditulis seperti ini $x^2 > 1$ atau $x^2 < 4$? (sambil melihat hasil pekerjaan subjek)

S1.17.4.3 : eh **dan** kayaknya di sini deh ... iya **dan**

P1.17.4.4 : **dan?**

S1.17.4.4 : karna kan 2

P1.17.4.5 : 2?

S1.17.4.5 : iye

P1.17.4.6 : maksudnya?

S1.17.4.6 : maksudnya dia ... dia ber ... e ... ada batasannya, batasan intervalnya

P1.17.4.7 : batasan intervalnya?

S1.17.4.7 : iye jadi saya tuliskan untuk setengah saja ini dulu trus ini ke sini
 $x^2 > 1$ dan $x^2 < 4$, trus saya pakai dulu persamaan $x^2 = 1$,
kemudian saya akarkan dapatnya $x = \pm\sqrt{1}$ $x = \pm 1$

P1.17.4.8 : ini dulu $x^2 = 1$, kan ... e ... ini dulu **dan** ini alasannya tadi apa? Atas dasar apa?

S1.17.4.8 : eh itu bagian dari sini juga

P1.17.4.9 : bagaimana itu?

S1.17.4.9 : beririsan

P1.17.4.10 : beririsan?

S1.17.4.10 : iye

P1.17.4.11 : di mana anda dapat bahwa itu beririsan?

S1.17.4.11 : dari sini, ini intervalnya (sambil menunjuk interval yang sudah digambar oleh subjek) karna kan yang saya ketahui kalo x -nya itu berada di tengah na dia pake ... menggunakan **dan**, tapi kalo misalnya dia ada 2, dia menggunakan **atau**

P1.17.4.12 : dia menggunakan **atau**?

S1.17.4.12 : iye

P1.17.4.13 : di mana dilihat itu? Maksud saya di mana di dapat?

S1.17.4.13 : di waktu belajar persamaan fungsi dan pertidaksamaan

P1.17.4.14 : persamaan fungsi dan pertidaksamaan?

S1.17.4.14 : iye

P1.17.4.15 : jadi artinya anda mengikut saja dari itu?

S1.17.4.15 : iye, cara cepat

P1.17.4.16 : cara cepat?

S1.17.4.16 : iye

P1.17.4.17 : tidak ditau alasan pastinya apa?

S1.17.4.17 : tidak

P1.17.4.18 : trus ini $x^2 > 1$ kan kenapa ... e ... diubah lagi persamaannya, diubah lagi ... e ... bentuk persamaannya menjadi = , persamaan tadi kan pertidaksamaan

S1.17.4.18 : iye

P1.17.4.19 : nah trus di bawahnya lagi diubah menjadi persamaan, apa dasarnya?

S1.17.4.19 : kalo saya begini, kan kalo misalnya saya tetap di sini pake pertidaksamaan , pertidaksamaan di sini maka di sini hasil akhirnya itu akan $x + \dots$ eh ... $x > \pm\sqrt{1}$, nah kalo $x > \pm\sqrt{1}$, untuk $x > 1$ benar tapi kalo untuk $x > -1$ itu salah, jadi e ... saya gunakan dulu persamaan untuk mendapatkan nilai x , nah setelah menghasilkan nilai x , saya substitusi ke sini ...e ... trus ... e ... menggunakan titik uji.

P1.17.4.20 : titik uji?

S1.17.4.20 : iye, untuk menentukan ... e ... daerah penyelesaiannya atau himpunan penyelesaiannya

P1.17.4.21 : jadi digunakan titik uji? itu alasannya?

S1.17.4.21 : iye

P1.17.4.22 : trus $x^2 = 1$ kan menjadi $x = \pm\sqrt{1}$, dari mana dasarnya itu?

S1.17.4.22 : e ... persamaan

P1.17.4.23 : persamaan?

S1.17.4.23 : iye

P1.17.4.24 : maksudnya?

S1.17.4.24 : e ... kan pernah dulu ada yang menanyakan ... e ... apakah sama $\sqrt{9} = 3$ dengan ... e ... $9 = \pm 3$, jadi kalo untuk $\sqrt{9} = 3$ adalah ...e ... apalagi namanya itu ... operasi, kalo itu yang \pm itu persamaan.

P1.17.4.25 : oh, jadi kalo misalnya $x^2 = 1$...

S1.17.4.25 : maka dia menyatakan \pm

P1.17.4.26 : $\pm\sqrt{1}$?

S1.17.4.26 : iye

P1.17.4.27 : tapi kalo $\sqrt{9}$?

S1.17.4.27 : kalo misalnya dia kan begini kak $\sqrt{9} = 3$, ini operasi tapi kalo misalnya....

P1.17.4.28 : operasi? ituji

S1.17.4.28 : iye operasi yang saya tahu itu , trus kalo misalnya $x^2 = 9$... $x = \pm 3$ ini operasi eh ... ini persamaan

P1.17.4.29 : mengapa itu?

S1.17.4.29 : ini persamaan karna kan ... e di $x^2 = 9$, x itu bukan hanya 3, tapi ada juga -3, kan $(-3)(-3)$ kan 9

P1.17.4.30 : oh seperti itu ya perbedaannya?

S1.17.4.30 : iya

P1.17.4.31 : trus kan sudah didapat $x = \pm 1$, , trus bagaimana caranya membuat garis bilangan seperti ini dari sini? (menunjuk hasil pekerjaan subjek)

S1.17.4.31 : menggunakan ini (menunjuk) sebagai titik uji

P1.17.4.32 : titik uji?

S1.17.4.32 : iya

P1.17.4.33 : trus, menentukan garis bilangannya, kenapa bisa itu sudah ditau garis bilangan seperti itu?

S1.17.4.33 : yang ini kan (menunjuk)

P1.17.4.34 : iya

S1.17.4.34 : daerah yang memenuhi?

P1.17.4.35 : iye ... e ... yang pertama itu kalo cara cepat kalo lebih besar itu pasti ... e ... ukurannya, dia tidak berimpit tapi keluarki begini (sambil menunjuk gambar), yang pertama itu trus ... e ... saya pakai titik uji lagi di sini, saya misalkan -2, saya ambil ke sini -2 ini kan -1

S1.17.4.35 : oh ya ambil -2 yang titik uji yang lain yah?

P1.17.4.36 : iya

S1.17.4.36 : -2 jadinya 4, 4 kan lebih besar 1 artinya memenuhi, saya coba dan seterusnya ternyata memenuhi makanya saya kasi begini saja, trus di sini juga saya ambil 2 memenuhi juga ini seperti itu

P1.17.4.37 : trus di sebelah jugasama yah, e ... trus ini kemudian hasilnya begini?

S1.17.4.37 : iye

P1.17.4.38 : jadi ini tadi?

S1.17.4.38 : dia menggunakan **atau**, kan gambarnya begini (digambar), jadi dia ada 2 himpunannya, eh ... himpunannya ini dengan ini (menunjuk), dia tidak menggunakan **dan** karna kan ... e ... yang saya tahu itu kalo **dan** itu satu ini ki kak kayak satu kompleks (daerah) begitu tapi kalo **dan**...

P1.17.4.39 : sudah cocok ini **atau** ?

S1.17.4.39 : iye, dia kan 2 di sini yang ininya ... yang ini saja yang pake **dan** dengan yang ini tapi kalo ini dengan ini **atau** artinya bisa saja yang ini saja, bisa yang ini

P1.17.4.40 : di soal pada ujian yang lalu, ujian tulisannya himpunan penyelesaiannya -2, x berada pada -2 dan -1, x berada pada 1 dan 2, jadi ada 2 ... x berada pada -2 dan -1 **dan** x berada pada 1 dan 2

S1.17.4.40 : aduh ... itu lagi kenapa pake **dan dulu?** **atau** (ragu-ragu) eh nda kutaumi kak, kenapa bisa pakai **dan** di situ, dan dua-duanya irisan, atau dia pakai **dan** karna dia irisan ?

P1.17.4.41 : apa tadi alasannya pake **atau?**

S1.17.4.41 : karna 2 di sini kak, 2 himpunan penyelesaiannya

P1.17.4.42 : yang mana itu?

S1.17.4.42 : yang ini dengan yang ini (sambil menunjuk)

P1.17.4.43 : begitu?

S1.17.4.43 : iye

P1.17.4.44 : jadi di sini **atau?** trus ini **dan -nya** Dipake dimana?

S1.17.4.44 : iya di', **dan** -nya itu dipakai pada saat ini kak digabungkan, ini kan **dan** nah setelah ini diiriskan, dihasilkan ini, nah ini adalah hasil penggabungan **dan** ini, ini dengan ini atau

P1.17.4.45 : jadi hasil akhirnya apa?

S1.17.4.45 : **atau**

P1.17.4.46 : jadi hasil akhirnya x berada pada -2 dan -1 **atau** x berada pada 1 dan 2?

S1.17.4.46 : iya

P1.17.4.47 : jadi di sini yang pakai **dan** bagaimana?

S1.17.4.47 : gantimi kak

P1.17.4.48 : maksud saya mana yang benar?

S1.17.4.48 : **atau**

P1.17.4.49 : maksud saya mana yang benar?

S1.17.4.49 : yang sekarang
 P1.17.4.50 : yang sekarang?
 S1.17.4.50 : iye
 P1.17.4.51 : jadi yang dulu salah?
 S1.17.4.51 : iye ... eh bukan salah **atau ... atau**
 P1.17.4.52 : jadi digabung ini, gabungan ini?
 S1.17.4.52 : iye
 P1.17.4.53 : kalo ini?
 S1.17.4.53 : irisan
 P1.17.4.54 : sudah, begitu saja?
 S1.17.4.54 : begitu
 P1.17.4.55 : jadi **atau** yah di sini jawabannya?
 S1.17.4.55 : iye **atau**.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 dapat menjawab dengan benar yaitu dengan mendapatkan himpunan penyelesaian yang benar walaupun langkah–langkah dalam mencari himpunan penyelesaian tidak berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat berkaitan dengan soal tetapi dalam menentukan himpunan penyelesaian dengan menggunakan titik uji dan konsep operasi himpunan seperti operasi “dan” juga operasi “atau” dengan tidak menuliskan alasan yang jelas. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.17.4.3; S1.17.4.4; S1.17.4.6; S1.17.4.7; S1.17.4.9; S1.17.4.11; S1.17.4.13; S1.17.4.15; S1.17.4.17; S1.17.4.18; S1.17.4.19; S1.17.4.20; S1.17.4.22; S1.17.4.24; S1.17.4.25; S1.17.4.27; S1.17.4.28; S1.17.4.29; S1.17.4.31; S1.17.4.35; S1.17.4.36; S1.17.4.37; S1.17.4.38; S1.17.4.39; S1.17.4.40; S1.17.4.41; S1.17.4.44; S1.17.4.45; S1.17.4.46; S1.17.4.47 dan S1.17.4.48] atas pertanyaan [P1.17.4.3; P1.17.4.4; P1.17.4.6; P1.17.4.7; P1.17.4.9; P1.17.4.11; P1.17.4.13; P1.17.4.15; P1.17.4.17; P1.17.4.18; P1.17.4.19; P1.17.4.20; P1.17.4.22; P1.17.4.24; P1.17.4.25; P1.17.4.27; P1.17.4.28; P1.17.4.29; P1.17.4.31; P1.17.4.35;

P1.17.4.36; P1.17.4.37; P1.17.4.38; P1.17.4.39; P1.17.4.40; P1.17.4.41; P1.17.4.44; P1.17.4.45; P1.17.4.46; P1.17.4.47 dan P1.17.4.48] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 17 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek pada soal ini adalah pemahaman instrumental.

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Kelengkapan Pada Bilangan Real.**

Transkrip wawancara 5 nomor 18

- P1.18.5.1 : ok, pada himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ dikenal konsep-konsep: batas atas, batas bawah, terbatas, supremum, infimum, maksimum dan minimum. Jelaskan definisi dan konsep-konsep tersebut!
- S1.18.5.1 : (subjek mengerjakan soal dalam beberapa menit) jadi maksudnya di sini seperti gambar berikut saya misalkan ... kan S itu subset dari bilangan real saya ambil lagi suatu ini s itu elemen dari S tadi yang ini (sambil menunjuk S) anggota-anggota itu adalah s , trus ada lagi u itu elemen real, jadi u ini saya maksudkan adalah batas atas di mana u itu lebih besar atau samadengan s
- P1.18.5.2 : tunggu dulu s itu anggotanya apa?
- S1.18.5.2 : anggotanya S
- P1.18.5.3 : jadi hanya satu s saja semua di sini?
- S1.18.5.3 : ini s ini mewakili semua anggota yang ada di sini (menunjuk selang pada himpunan S)
- P1.18.5.4 : oh, jadi banyak di sini anggota?
- S1.18.5.4 : iya
- P1.18.5.5 : kenapa hanya dinamakan dengan s ?
- S1.18.5.5 : kan kalo misalnya saya tulis s , t dan seterusnya itu terlalu panjang, terlalu banyak yang ini ... jadi saya umpamakan saja anggota-anggotanya ini adalah s
- P1.18.5.6 : trus, ini u kan, u ini ada berapa u ?
- S1.18.5.6 : u ini ada banyak
- P1.18.5.7 : banyak?
- S1.18.5.7 : iya, sama halnya dengan s , s banyak, u juga banyak tapi saya singkat jadi satu saja, saya umpamakan ini u , dan saya kasih keterangan di sini u itu harus lebih besar atau samadengan s nah inilah u ini adalah batas atas dari S subset \mathbb{R}
- P1.18.5.8 : jadi u ini apa?

S1.18.5.8 : elemennya real

P1.18.5.9 : jadi u-nya di sini banyak, kenapa bisa dikatakan banyak?

S1.18.5.9 : maksudnya di sini kan, batas atas itu bukan hanya yang berada di himpunan S sendiri tapi dia juga melingkupi kalo misalnya tergantung dari apa yang dibicarakan ... e ... kalo misalnya dia hanya himpunan ... seandainya di sini e ... dia tidak memiliki maksudnya himpunan ini subset R artinya sampai S saja, maksudnya di situ $u = s$, sampai di sini saja (himpunan S) tapi kan di sini dia subset dari R , jadi u nya itu banyak sampai tak terhingga ... tak terhingga banyaknya di sini karna dia merupakan himpunan dari R

P1.18.5.10 : apakah u itu bisa juga elemen S

S1.18.5.10 : iya

P1.18.5.11 : kenapa bisa?

S1.18.5.11 : karna kan dia batas atas terus maksudnya di sini u itu bisa elemen S tapi dia yang paling besarnya m yang berada di sini (menunjuk ujung paling kanan dari himpunan S)

P1.18.5.12 : apakah u itu, kan S subset dari R kan, ya?

S1.18.5.12 : Iya

P1.18.5.13 : yang saya mau tanya apakah u bisa saya tempatkan, kan elemen R , apakah u saya bisa tempatkan di mana saja?

S1.18.5.13 : tidak

P1.18.5.14 : tidak?

S1.18.5.14 : iya, kan ada ketentuannya u itu lebih besar atau samadengan s

P1.18.5.15 : trus batas bawah?

S1.18.5.15 : sama saja cuma dia kebalikan dari batas atas, dia berada di sebelah kiri himpunan S , jadi dia hanya ditentukan dengan v -nya itu saya sambil v -nya sebagai batasan bawah satu juga satu titik satu simbol v tapi dia meliputi banyak titik, jadi sama saja di u tadi, saya cuman tulis satu ini v dan v -nya harus lebih kecil atau samadengan s

P1.18.5.16 : kembali saya bertanya apakah v itu bisa elemen dari S ?

S1.18.5.16 : iya

P1.18.5.17 : himpunan S ?

S1.18.5.17 : iya, dia ... yang penting dia ada di akhir, di ujung kiri S

P1.18.5.18 : kemudian terbatas?

S1.18.5.18 : terbatas maksudnya di sini dia harus memiliki batas atas dan batas bawah, Jika dia hanya memiliki batas atas saja maka dia tidak terbatas atau sebaliknya jika dia hanya memiliki batas bawah maka dia juga tidak terbatas jadi terbatas maksudnya di sini harus memiliki kedua-duanya harus memiliki batas atas dan juga harus memiliki batas bawah

P1.18.5.19 : contohnya terbatas? Bisa?

S1.18.5.19 : contohnya itu seperti ini himpunan bilangan asli yang kurang dari 10 nah kan himpunan bilangan asli yang kurang dari 10 itu kan

anggotanya 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 trus dia memiliki batas atas 1 ... eh batas bawah 1 dan batas atasnya itu adalah 9, 10, 11 dan seterusnya, terus di sini kan dia memiliki batas atas dan batas bawah makanya himpunan tersebut dinamakan himpunan terbatas

P1.18.5.20 : kemudian supremum

S1.18.5.20 : kembali, supremum itu batas atas terkecil, seperti ini kita ada himpunan S yang anggotanya itu s , ada di sini batasan-batasan yaitu u , a nah yang termasuk nilai supremum dari himpunan ini adalah u karna dia adalah batas atas terkecil, dia juga bisa ada di S di sini (sambil menunjuk ujung selang himpunan S) seperti itu

P1.18.5.21 : kan tadi dibilang u itu banyak, kalo saya bilang banyak ... maksudnya u itu hanya mewakili satu anda tadi bilang begitu ya toh tapi sebenarnya dia banyak, kenapa ada lagi a ?

S1.18.5.21 : nah maksudnya disini u itu saya bagi lagi u dengan a , ini kan u itu banyak jadi saya keluarkan satu mewakili lagi dari yang banyak ini jadi cukup dua terus e ... kan maksudnya kita hanya mencari batas atas terkecil atau batas atas yang paling mendekati s atau yang sama dengan s yang ada di sini sebelah kanan S

P1.18.5.22 : jadi itu definisi dari supremum? ulangi

S1.18.5.22 : supremum adalah batas atas terkecil dari himpunan S ... elemen S subset R

P1.18.5.23 : jadi batas atas terkecil dari himpunan S ?

S1.18.5.23 : iya dan dia hanya memiliki 1 ... tepat satu

P1.18.5.24 : yaitu?

S1.18.5.24 : u

P1.18.5.25 : tadi kan dibilang u nya itu banyak, kalo banyak berarti dia tidak tunggal dong?

S1.18.5.25 : tunggalkan mi saja di sini kak he ...

P1.18.5.26 : iya saya tanya dulu kan tadi kita bilang u itu banyak sama dengan s baru tadi kita bilang lagi suremunnya adalah u , jadi berkebalikanki dong dengan u itu banyak kemudian u itu hanya satu jadi yang mana yang benar di sini

S1.18.5.26 : maksudnya di sini saya pake u lagi di sini toh, saya e ... maksudnya kan batas atas terkecil artinya ter itu artinya paling nah kalo paling itu hanya ada satu jadi saya umpamakan u -nya ini tinggal satu, dan ini yang memiliki lagi yang selebihnya

P1.18.5.27 : maksudnya?

S1.18.5.27 : ini kan banyak di sini tapi saya keluarkan ke sini saya bagi dua dan saya tinggalkan cuma satu dan inilah yang memiliki banyak itu yang selebihnya jadi saya katakan kalau u itu batas terkecil

P1.18.5.28 : trus a -nya itu apa?

S1.18.5.28 : a ini masih batas atas

P1.18.5.29 : jadi masih adakah batas atas yang lain?

- S1.18.5.29 : iya masih banyak
- P1.18.5.30 : apa itu? Yang mana?
- S1.18.5.30 : bisa kan kalo ini a, bisa saya tulis lagi, b, c dan seterusnya terserah
- P1.18.5.31 : trus jadi itu kan batas atasnya banyak, jadi supremumnya yang mana
- S1.18.5.31 : yang paling kecil, batas atas yang paling kecil
- P1.18.5.32 : yang mana batas atas yang paling kecil?
- S1.18.5.32 : kalo di sini itu saya umpamakan u
- P1.18.5.33 : ok, sedangkan infimum lanjut
- S1.18.5.33 : infimum kebalikan dari supremum, kalo supremum itu batas atas terkecil, kalo infimum batas atas terbesar, sama lagi tadi jadi v ini waktu di batas bawah itu saya anggap ini batas bawah, terus saya penggal lagi atau saya bagi ada s, ada t, nah di s dan t ini memiliki banyak batasan-batasan ... batas bawah, terus batas bawah itu juga, infimum itu juga hanya ada satu yaitu v
- P1.18.5.34 : kembali lagi saya tanya tadi kan anda bilang v itu banyak, kenapa anda membaginya lagi menjadi s, t
- S1.18.5.34 : bukan s di sini kak, supaya tidak bingung
- P1.18.5.35 : kenapa anda bagi misalnya v, t
- S1.18.5.35 : di sini saya bagi
- P1.18.5.36 : kenapa ... jangan dulu, anda bilang v itu satu toh, infimum itu hanya satu toh, yaitu?
- S1.18.5.36 : v
- P1.18.5.37 : kenapa yang satu ini anda membagi lagi menjadi p, t
- S1.18.5.37 : oo... maksudnya begini kak, kan tadi saya ... ini v ini waktu di batas bawah itu banyak, saya bagi ada v ada t dan seterusnya di sini bisa, jadi v ini saya umpamakan dia tinggal sendiri saja satu
- P1.18.5.38 : apa dasarnya anda mengumpamakan v nya hanya satu
- S1.18.5.38 : karena saya sudah membagi v dengan p
- P1.18.5.39 : ok, maksimum?
- S1.18.5.39 : maksimum itu batas atas yang masih merupakan anggota himpunan S, maksudnya maksimum itu dialah yang paling ... batas atas yang paling kecil atau seperti di himpunan ini, himpunan bilangan yang kurang dari 10, di sini kita ketahui bahwa e ... batas atasnya itu kan 9, nah ini juga merupakan maksimumnya karna dia berada di himpunan ini
- P1.18.5.40 : trus saya tanya dulu kan tadi dibidang di sini maksimum adalah batas atas yang masih merupakan anggota himpunan S, jadi yang manakah yang bukan merupakan nilai maksimum, misalnya kasih saya contoh?
- S1.18.5.40 : seperti ini misalnya himpunan A itu himpunan bilangan asli yang kurang dari 10, anggotanya kan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nah yang maksimumnya itu 9 karna dia adalah batas atasnya, batas atasnya

dari ini kan banyak, ada 9, 10, dan seterusnya tapi batas yang masih ada di himpunan A ini ada kan adalah 9, jadi 9 ini adalah maksimum

P1.18.5.41 : trus minimumnya apa?

S1.18.5.41 : minimumnya kebalikan, kalo minimum itu batas bawah yang masih merupakan anggota S, kembali lagi contohnya himpunan ini himpunan A adalah himpunan bilangan asli yang kurang dari 10 trus di sini kan diketahui kalo batas bawahnya itu 1, terus kebetulan batas bawahnya ini masih berada di himpunan A, ini merupakan minimum

P1.18.5.42 : batas bawahnya yang lain?

S1.18.5.42 : tidak ada kak, karna kan dia himpunan bilangan asli, jadi dia berakhir di 1, jadi 1 itu merupakan batas bawahnya

P1.18.5.43 : jadi minimumnya adalah ?

S1.18.5.43 : 1

P1.18.5.44 : ya, apa perbedaan supremum dan infimum eh supremum dan maksimum

S1.18.5.44 : ha ... itu dia , kalo supremum e ... iyo di'

P1.18.5.45 : apa perbedaan supremum dan maksimum?

S1.18.5.45 : e kalo maksimum itu, ada di himpunan A

P1.18.5.46 : iya

S1.18.5.46 : tapi kalo supremum bisa saja dia tidak di himpunan A

P1.18.5.47 : bisa saja dia tidak di himpunan A?

S1.18.5.47 : iya, di bilangan real misalnya atau ...

P1.18.5.48 : coba saya, kasih saya satu contoh yang mana yang merupakan supremum, yang mana maksimum, kasih saya suatu contoh, supaya saya bisa lihat yang mana bedanya supremum dan maksimum

S1.18.5.48 : tidak ada yang ... kalo contoh kak, nda kutahu kalo contoh ... nda kutau contoh yang bisa membedakan supremum dengan maksimum karna yang saya tahu ... e ... hampir sama ... nda tau apanya yang membedakan

P1.18.5.49 : apa yang membedakan... nda tahu? Apa yang membedakan antara supremum ...tadi, apa yang dimaksud supremum?

S1.18.5.49 : supremum itu batas atas terkecil

P1.18.5.50 : batas atas terkecil?

S1.18.5.50 : iye, kalo maksimum batas atas yang masih ... itu perbedaannya, kalo supremum batas atas terkecil, kalo maksimum batas atas yang masih merupakan anggota himpunan S

P1.18.5.51 : jadi tidak diketahui apa perbedaan antara supremum dan maksimum?

S1.18.5.51 : tidak

P1.18.5.52 : kemudian apa yang ... perbedaan infimum dan minimum

S1.18.5.52 : samaji juga kak tidak , karna nilainya itu menurut saya itu semuanya tepat satu

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 mampu mendeskripsikan konsep-konsep yang terkait dengan lengkap dan mendalam, namun belum dapat menjelaskan secara simbolik konsep-konsep tersebut. Hal ini diketahui melalui wawancara di atas.

Setelah menganalisis hasil wawancara tersebut pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada jawaban soal nomor 1 adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 19

- P1.19.5.1 : ok, kita lanjut ke soal nomor 2, berikan contoh himpunan bilangan yang memiliki batas atas dan batas bawah!
- S1.19.5.1 : a ... himpunan yang memiliki batas atas dan batas bawah saya ambil contoh di sini himpunan A itu himpunan bilangan asli yang kurang dari 10 e ... jadi anggotanya 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mmm... batas bawahnya itu 1, batas atasnya 9, 10, 11, 12 dan seterusnya
- P1.19.5.2 : e ... tunggu dulu, e ... apa perbedaan batas atas dengan supremum?
- S1.19.5.2 : a ... kalo batas atas itu banyak eh kalo supremum satuji
- P1.19.5.3 : satuji?
- S1.19.5.3 : iye
- P1.19.5.4 : itukan menurut anda
- S1.19.5.4 : iya, menurut saya
- P1.19.5.5 : saya tanya ... saya tanya lagi, kan himpunan bilangan asli tadi dibilang 1 sampai 9, batas atasnya 9 , batas-batas atasnya apa saja?
- S1.19.5.5 : 9, 10 ,11 dan seterusnya
- P1.19.5.6 : dan seterusnya? Batas bawahnya?
- S1.19.5.6 : 1
- P1.19.5.7 : 1? Tadi infimum tadi dibilang sama dengan supremum? (maksud pewawancara sama jumlah dari supremum dan infimum yaitu 1)
- S1.19.5.7 : ih ... (heran dan bingung)
- P1.19.5.8 : infimum tadi , ada ... supremum tadi itu ... batas atas tadi itu banyak kan dibilang
- S1.19.5.8 : iye
- P1.19.5.9 : kalau batas bawah iya?

S1.19.5.9 : banyak juga cuman kebetulan yang saya ambil contoh di sini kan himpunan bilangan asli, nah kan kalo bilangan asli itu kan dimulai dari 1

P1.19.5.10 : oh begitu?

S1.19.5.10 : iye, jadi batas bawahnya cuman 1, kita ambil 0, dia telah melewati e ... himpunan itu

P1.19.5.11 : begitu?

S1.19.5.11 : iye

P1.19.5.12 : jadi himpunan bilangan asli batas atasnya mmm ... 9, 10, 11, 12 , batas bawahnya?

S1.19.5.12 : 1

P1.19.5.13 : tadi kan anda bilang bahwa batas bawahnya banyak

S1.19.5.13 : iya

P1.19.5.14 : kenapa hanya 1 saja batas bawahnya?

S1.19.5.14 : e ... maksudnya di sini aduh ...maksudnya batas bawah itu bisa 1, bisa banyak

P1.19.5.15 : bisa 1 bisa banyak?

S1.19.5.15 : iya

P1.19.5.16 : iyakah?

S1.19.5.16 : iya (yakin)

P1.19.5.17 : tadi kan dibilang tidak ... anda tidak bilang tadi bisa 1, anda bilang banyak

S1.19.5.17 : ah ... dilupa itu kak he ... he ... (ketawa) dilupa kak

P1.19.5.18 : dilupa?

S1.19.5.18 : iye

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun alasan yang diberikan kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.19.5.1; S1.19.5.12; S1.19.5.5; S1.19.5.6; S1.19.5.9; S1.19.5.10 dan S1.19.5.14] atas pertanyaan [P1.19.5.1; P1.19.5.12; P1.19.5.5; P1.19.5.6; P1.19.5.9; P1.19.5.10 dan P1.19.5.14] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 19 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 20

- P1.20.5.1 : coba nomor3 dulu, bisakah kamu memberikan contoh himpunan bilangan yang memiliki batas atas tapi tidak memiliki batas bawah!
- S1.20.5.1 : nah ... ini yang saya pertanyakan juga, tapi saya tulis contohnya ... memiliki batas atas tapi tidak memiliki batas bawah, saya ambil contoh himpunan bilangan bulat negatif ... himpunan bilangan bulat negatif kan dimulai dari -1, -2, -3, -4 dan seterusnya... saya tulis batas atasnya itu -1, batas bawahnya saya tidak ketahui
- P1.20.5.2 : memiliki batas atas minus?
- S1.20.5.2 : minus 1
- P1.20.5.3 : tidak memiliki batas bawah?
- S1.20.5.3 : iye
- P1.20.5.4 : jadi batas atasnya apa?
- S1.20.5.4 : -1
- P1.20.5.5 : batas bawah?
- S1.20.5.5 : tidak ada
- P1.20.5.6 : tidak ada?
- S1.20.5.6 : iye
- P1.20.5.7 : ya, saya tanya dulu himpunan bilangan bulat negatif batas atas tadi kan dibilang
- S1.20.5.7 : -1
- P1.20.5.8 : dibilang banyak toh
- S1.20.5.8 : aduh, itu lagi
- P1.20.5.9 : jadi kenapa di sini hanya batas atasnya -1
- S1.20.5.9 : kak, kaluppaيمي lagi tadi hee...hehe ... wah sebenarnya itu, maksudnya e batas atas ataupun batas bawah dia bisa 1 tapi bisa juga banyak
- P1.20.5.10 : bisa juga banyak?
- S1.20.5.10 : iya. e... kalo misalnya dia terbatas bukan terbatas maksudnya memiliki batas atas batas bawah, kan di sini himpunan bilangan bulat negatif artinya yang paling ujung itu -1, kalo misalnya saya ambil lagi 0, kan dia bukan himpunan bilangan bulat negatif lagi, tapi dia bilangan bulat tak positif, iyokah iyo? Iya kak
- P1.20.5.11 : begitu?
- S1.20.5.11 : iya

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun alasan yang diberikan kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.20.5.1; S1.20.5.7; S1.20.5.8; S1.20.5.9 dan

S1.20.5.10] atas pertanyaan [P1.20.5.1; P1.20.5.7; P1.20.5.8; P1.20.5.9 dan P1.20.5.10] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 20 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek pada jawaban adalah pemahaman relasional..

Transkrip wawancara 5 nomor 21

- P1.21.5.1 : oh iya ya .. ok, trus lanjut pada soal berikutnya nomor 4, berikan contoh himpunan bilangan yang tidak memiliki batas atas dan memiliki batas bawah!
- S1.21.5.1 : memiliki batas bawah dan tidak memiliki batas atas, saya ambil contohnya himpunan bilangan asli
- P1.21.5.2 : yang tidak memiliki batas atas dan memiliki batas bawah, oh ya ... ya
- S1.21.5.2 : himpunan bilangan asli, kan bilangan asli itu kan dimulai dari 1, 2, 3 sampai seterusnya
- P1.21.5.3 : iya
- S1.21.5.3 : jadi batas atasnya tidak ada, karena saya tidak ketahui, trus batas bawahnya itu 1
- P1.21.5.4 : batas atasnya?
- S1.21.5.4 : tidak diketahui, jadi tidak ada trus batas bawahnya 1
- P1.21.5.5 : batas bawahnya 1
- S1.21.5.5 : 1 iya, karna kan dia berawal dari 1

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun alasan yang diberikan kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.21.5.1 ; S1.21.5.2 ; S1.21.5.3 ; S1.21.5.4 dan S1.21.5.5] atas pertanyaan [P1.21.5.1; P1.21.5.2; P1.21.5.3; P1.21.5.4 dan P1.21.5.5] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 21 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek pada jawaban adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 22

- P1.22.5.1 : nomor 5, berikan contoh Berikan contoh himpunan bilangan yang tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah!
- S1.22.5.1 : contoh tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah itu himpunan bilangan bulat, kan diketahui kalo bilangan bulat itu ada e ... bilangan bulat positif ... 0 dan bilangan bulat negatif e... trus kalo kita gabung semuanya jadi dia tidak memiliki bila ... eh batas atas dan ... tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah
- P1.22.5.2 : mengapa tidak ... bisa dikatakan tidak memiliki batas atas dan batas bawah
- S1.22.5.2 : karna kita tidak ketahui bahwa berapa batasan yang ada di atas, dia tidak ter ... ter batasmu ke atas, kan kita tidak diketahui berapa ... kalo misalnya saya sebut 10 mungkin masih ada yang bilangan di atasnya 11, jadi seperti itu.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun alasan yang diberikan kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.22.5.1 dan S1.22.5.2] atas pertanyaan [P1.22.5.1 dan P1.22.5.2] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 22 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek pada jawaban adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 23

- P1.23.5.1 : Berikan contoh himpunan bilangan yang supremumnya ada tapi tidak memiliki infimum!

S1.23.5.1 : supremumnya ada tapi tidak memiliki infimum, contohnya itu himpunan bilangan bulat negatif
P1.23.5.2 : alasannya?
S1.23.5.2 : himpunan bilangan bulat negatif, supremumnya itu -1, infimumnya tidak ada
P1.23.5.3 : supremumnya itu -1, infimumnya tidak ada ya?
S1.23.5.3 : iye
P1.23.5.4 : nah apa tadi pengertian supremum?
S1.23.5.4 : batas atas terkecil
P1.23.5.5 : terkecil?
S1.23.5.5 : iye
P1.23.5.6 : ya, kan anda menunjuk -1
S1.23.5.6 : iya
P1.23.5.7 : -1 kan supremumnya?
S1.23.5.7 : iye
P1.23.5.8 : trus e ... mana yang lain batas atas yang lain kok anda bisa langsung menyimpulkan bahwa -1 adalah batas atas yang terkecil
S1.23.5.8 : karna satu-satunya batas atas
P1.23.5.9 : satu-satunya batas atas?
S1.23.5.9 : iya, -1 satu-satunya batas atas, jadi saya tunjuk saja kalo -1 itu adalah supremumnya
P1.23.5.10 : bagaimana dengan infimum?
S1.23.5.10 : tidak ada, karna kan tidak memiliki batas bawah

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun alasan yang diberikan kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.23.5.1; S1.23.5.2; S1.23.5.4; S1.23.5.6; S1.23.5.8; S1.23.5.9; dan S1.23.5.10] atas pertanyaan [P1.23.5.1; P1.23.5.2; P1.23.5.4; P1.23.5.6; P1.23.5.8; P1.23.5.9; dan P1.23.5.10] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 23 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 24

- P1.24.5.1 : ok nomor 7, berikan contoh himpunan bilangan yang infimumnya ada tapi tidak memiliki supremum!
- S1.24.5.1 : himpunan bilangan bulat positif atau bilangan asli
- P1.24.5.2 : himpunan apa?
- S1.24.5.2 : bilangan bulat positif atau bilangan asli
- P1.24.5.3 : mengapa?
- S1.24.5.3 : kan di sini $N \dots 1, 2, 3, 4, 5$ dan seterusnya, supremumnya tidak ada karna tidak memiliki batas atas, infimumnya adalah 1 karna dia memiliki batas bawah 1
- P1.24.5.4 : batas bawah 1?
- S1.24.5.4 : iye, alasannya seperti tadi he ... he ...

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun alasan yang diberikan kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.24.5.1; S1.24.5.3 dan S1.24.5.4] atas pertanyaan [P1.24.5.1; P1.24.5.3 dan P1.24.5.4] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 24 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 25

- P1.25.5.1 : ok, nomor 8, berikan contoh himpunan bilangan yang tidak memiliki supremum dan tidak memiliki infimum!
- S1.25.5.1 : contohnya itu himpunan bilangan bulat e .. kan pada himpunan bilangan bulat itu tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah
- P1.25.5.2 : ya
- S1.25.5.2 : dengan demikian supremum dan infimumnya juga tidak ada
- P1.25.5.3 : begitu?
- S1.25.5.3 : iya

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar dan mampu memberikan alasan. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.25.5.1; S1.25.5.2 dan S1.25.5.3] atas pertanyaan [P1.25.5.1; P1.25.5.2 dan P1.25.5.3] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 25 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.

Transkrip wawancara 5 nomor 26

- P1.26.5.1 : ya, kita lanjut nomor 9
 S1.26.5.1 : aduh ...inimi sembarang
 P1.26.5.2: ya, diketahui $A = \left\{(-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Selidikilah apakah himpunan A memiliki batas atas, batas bawah, supremum dan infimum!
 S1.26.5.2 : a ... untuk nomor 9 menurut saya batas atas, batas bawah, supremum dan infimumnya tidak ada ... tapi pasti ada di situ he ... he ... tidak ada karna ... tidak ada karna, tidak ada karna e .. kan diketahui di situ bahwa N itu adalah elemen bilangan asli
 P1.26.5.3 : tunggu dulu ulangi ... ulangi tadi nomor 9 adalah
 S1.26.5.3 : batas atas, batas bawah, supremum dan infimumnya tidak ada
 P1.26.5.4 : ya, trus?
 S1.26.5.4 : tidak ada karna diketahui di soalnya itu kalo N itu adalah elemen bilangan asli, nah diketahui kalo N itu tidak memiliki batas atas
 P1.26.5.5 : tidak memiliki batas atas?
 S1.26.5.5 : iye
 P1.26.5.6 : begitu?
 S1.26.5.6 : iye, (menghirup nafas panjang) ituji alasannya semuanya itu kak hehe ... tapi beda pasti di situ aduuuh ...
 P1.26.5.7 : hehehe trus sama dengan batas bawah juga
 S1.26.5.7 : iye semuanya kak karna N itu adalah bilangan asli ... nda kutahuki
 P1.26.5.8 : di sini pada ujian tulisanta batas atas memang tidak ada karna N elemen bilangan asli di mana N tidak memiliki batas atas kemudian batas bawah ada karna N elemen bilangan asli dimana N memiliki batas bawah yaitu 1, yang mana yang benar?
 S1.26.5.8 : nah setelah kupikir-pikir, setelah tadi diujicobakan ternyata memang itu N itu N bilangan asli itu memiliki batas bawah, akan tetapi jika

- kita substitusi ke persamaan ... ke himpunan A maka dia menghasilkan itu $-\frac{1}{3}$, jangan dulu ... (subjek mengerjakan kembali) ... ada di ' aduuuh, salah lagi ini, -3 iyo di' sebenarnya ada tapi biarmi deh terlanjur
- P1.26.5.9 : ih tidak bisa di'
- S1.26.5.9 : bisaji diulang kak? ulangmi pale
- P1.26.5.10 : ... begini nda pa pa ... kalo ada pemikiran yang lain tolong silahkan lagi kembali lagi di diperbaiki kembali, dipikirkan kembali, kalo misalnya ada katakan ada, kalo misalnya anda tidak dapat ya bilang saja tidak ada.
- S1.26.5.10 : oh iye, insya Allah ada $-\frac{1}{3}$
- P1.26.5.11 : $-\frac{1}{3}$?
- S1.26.5.11 : iya kak
- P1.26.5.12 : batas? Apa tadi? Batas bawah ya ...
- S1.26.5.12 : batas bawah
- P1.26.5.13 : ada yaitu $-\frac{1}{3}$?
- S1.26.5.13 : ya
- P1.26.5.14 : kenapa langsung disimpulkan $-\frac{1}{3}$
- S1.26.5.14 : karna saya substitusi ... kan diketahui di N dibilangan asli itu kan memiliki batas bawah 1 , saya substitusi ke himpunan A, hasilnya itu $-\frac{1}{3}$, jadi saya simpulkan kalo $-\frac{1}{3}$ itu adalah batas bawahnya
- P1.26.5.15 : kenapa hanya $n = 1$ yang dimasukkan?
- S1.26.5.15 : e ... kan kalo saya ambil yang genap sudah tentu lebih besar dan kalo saya ambil yang ganjil lagi misalnya 3 itukan $\frac{7}{3} \dots \frac{3}{7}$ eh ... $-\frac{3}{7}$
- P1.26.5.16 : maksudnya begini kenapa anda hanya mengambil $n = 1$ saja, langsung menyimpulkan bahwa batas bawahnya $-\frac{1}{3}$
- S1.26.5.16 : ih lebih besar i, cocokmi tadi kak tidak ada
- P1.26.5.17 : jadi batas atas, batas bawah tidak ada semua?
- S1.26.5.17 : iye, tidak ada mo di sini deh
- P1.26.5.18 : supremumnya kenapa tidak ada?
- S1.26.5.18 : tidak ada juga karna batas atasnya tidak ada
- P1.26.5.19 : oh, begitupun infimumnya?
- S1.26.5.19 : tidak ada juga kak karna tidak ada batas bawahnya

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa , Subjek S1 tidak mampu memberikan jawaban yang benar dengan langkah-langkah penyelidikan yang tidak memiliki

alasan yang tepat. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S1.26.5.1; S1.26.5.2; S1.26.5.4; S1.26.5.7; S1.26.5.8; S1.26.5.10; S1.26.5.14; S1.26.5.15; S1.26.5.16; S1.26.5.17; S1.26.5.18 dan S1.26.5.19] atas pertanyaan [P1.26.5.1; P1.26.5.2; P1.26.5.4; P1.26.5.7; P1.26.5.8; P1.26.5.10; P1.26.5.14; P1.26.5.15; P1.26.5.16; P1.26.5.17; P1.26.5.18 dan P1.26.5.19] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 26 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami bagaimana menemukan batas atas, batas bawah, supremum dan infimum pada suatu himpunan bilangan pada materi sifat kelengkapan. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami konsep sifat kelengkapan sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

3) Validasi Data Pemahaman Subjek S1 dalam menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real

Untuk menguji validitas data pemahaman subjek S1 dalam menyelesaikan soal-soal pada materi Sistem Bilangan Real I, maka dilakukan triangulasi untuk mencari kesesuaian data pemahaman subjek S1 terhadap soal-soal pada materi Sistem Bilangan Real pada tes uraian dan wawancara. Triangulasi yang dimaksud dilakukan seperti yang disajikan pada tabel berikut.

Tabel 4.11 Triangulasi Data Pemahaman Subjek S1 dalam Menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real pada Tes Uraian dan Wawancara

No Soal	Triangulasi Metode untuk Subjek S1								Keterangan		
	Tes Uraian				Wawancara				S	KS	TS
	T M	I	R	F	T M	I	R	F			
1			✓				✓		✓		
2	✓				✓				✓		
3			✓				✓		✓		
4			✓				✓		✓		
5	✓				✓				✓		
6				✓				✓	✓		
7	✓				✓				✓		
8	✓				✓				✓		
9	✓				✓				✓		
10		✓				✓			✓		
11		✓				✓			✓		
12		✓				✓			✓		
13			✓					✓		✓	
14			✓					✓		✓	
15			✓				✓		✓		
16			✓				✓		✓		
17		✓				✓			✓		
18			✓				✓		✓		
19			✓				✓		✓		
20			✓				✓		✓		
21			✓				✓		✓		
22			✓				✓		✓		
23			✓				✓		✓		
24			✓				✓		✓		
25			✓					✓		✓	
26	✓				✓				✓		

Keterangan:

TM : Tidak Memahami

I : Instrumental

R : Relasional

F : Formal

S : Sesuai: informasi yang diberikan pada tes uraian sama/sejalan dengan tes wawancara

KS : Kurang Sesuai : informasi yang diberikan berkurang atau bertambah pada tes uraian /tes wawancara

TS : Tidak Sesuai : informasi yang diberikan pada tes uraian tidak sama dengan tes wawancara

Berdasarkan tingkat kesesuaian yang ditunjukkan pada tabel triangulasi di atas maka diperoleh informasi sebagai berikut.

Subjek S1 menunjukkan bahwa ada 23 dari 26 soal sesuai (konsisten) dengan rincian: kategori pemahaman relasional ada 12 yang sesuai, kategori pemahaman instrumental ada 4 yang sesuai, kategori pemahaman formal ada 1 yang sesuai, sedangkan sisanya 6 soal tidak dipahami oleh Subjek S1. Mayoritas (12 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori pemahaman relasional. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa pemahaman Subjek S1 adalah pemahaman relasional.

b) Penyajian Data dan Validasi data Subjek S2 tentang Pemahaman dalam Menyelesaikan Soal-soal Materi Sistem Bilangan Real

Untuk mengetahui pemahaman subjek terhadap materi Sistem Bilangan Real terlebih dahulu dilakukan penyajian data, validasi data, dan interpretasi data, Tes Uraian Materi Sistem Bilangan Realdilaksanakan pada hari Rabu, 26 September 2012 dan wawancara pertama dilaksanakan pada hari Rabu, 7 November 2012, wawancara kedua dilaksanakan pada Kamis, 8 November 2012, wawancara ketiga dilaksanakan pada hari Jumat, 9 November 2012, wawancara keempat dilaksanakan pada hari Sabtu, 10 November 2012 dan wawancara kelima dilaksanakan pada hari Ahad, 11 November 2012. Semua wawancara dilakukan di Unismuh Makassar.

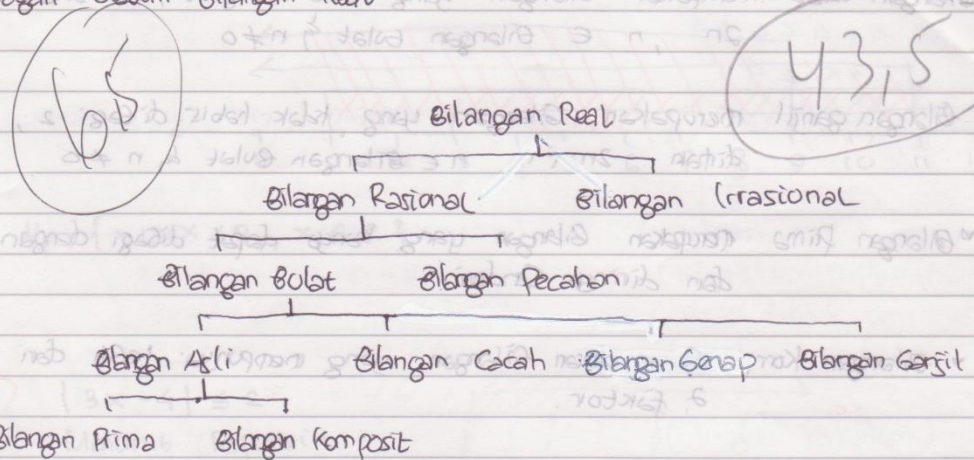
1) Penyajian Data Pemahaman Subjek S2 dalam menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real melalui Metode Tes Uraian.

Berikut ini adalah hasil tes uraian Subjek S2 tentang pemahaman terhadap Materi Sistem Bilangan Realdalam menyelesaikan soal-soal pada materi tersebut, disertai dengan interpretasinya.

- **Pemahaman terhadap Materi Jenis-Jenis Bilangan Real**

1. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S2 sudah bisa menyebutkan dengan benar jenis-jenis bilangan real namun belum mampu mendefinisikan dengan baik dan secara simbolik bilangan-bilangan tersebut khususnya bilangan rasional, bilangan irrasional dan bilangan pecahan. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 1 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman adalah pemahaman instrumental.

1) Bagaimana Sistem Bilangan Real



Penjelasan :

- Bilangan Real adalah bilangan gabungan antara bilangan rasional dan bilangan irrasional.
- Bilangan Rasional adalah bilangan yang dapat dibentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ yang akan menghasilkan bilangan bulat.
- Bilangan Irrasional adalah bilangan yang tidak dapat menghasilkan bilangan bulat, jika dibentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ dan bukan bilangan desimal berulang.
- Bilangan Bulat adalah bilangan yang terdiri dari bilangan positif, 0, dan juga bilangan negatif.
- Bilangan Pecahan adalah bilangan yang dapat dibentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, a adalah bilangan bulat dan b adalah bilangan bulat.
- Bilangan Asli merupakan bilangan yang dimulai dengan 1 sampai tak terhingga. Contoh : 1, 2, 3, 4, 5, ...
- Bilangan Cacah merupakan bilangan bulat positif yang dimulai dari 0 sampai tak terhingga.

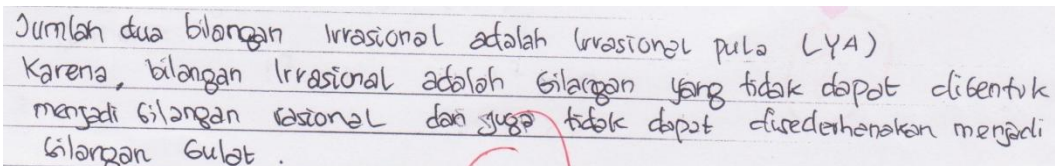
Bilangan Prima merupakan bilangan yang hanya dapat dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. selisih negatif
 Bilangan Komposit merupakan bilangan yang mempunyai lebih dari 2 faktor.

2. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S2 salah dalam menjawab soal, dengan mengatakan bahwa ada yang jumlahnya tak terhingga banyaknya bilangan real yang mendekati nol, jadi subjek menyimpulkan bahwa ada bilangan real yang paling mendekati 0 bahkan tak terhingga banyaknya bilangan real yang mendekati nol namun tidak dapat menentukan yang mana bilangan real yang paling mendekati bilangan nol. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep bilangan real dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Bilangan real yang paling mendekati bilangan nol itu Ada.
 Yang jumlahnya tak terhingga banyaknya.
 Contohnya:
 0,001
 0,000011
 dan banyak lagi bilangan real lainnya yang mendekati nol.

3. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S2 mampu menjawab dengan benar soal tersebut, namun tidak mampu menjelaskan alasan mengapa diantara bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 tak berhingga banyaknya bilangan real dan belum dapat menunjukkan buktinya secara matematis. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 3 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka

5. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 menjawab pertanyaan dengan salah bahwa jumlah dua bilangan irrasional selalu menghasilkan bilangan irrasional alasannya karena bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dibentuk menjadi bilangan rasional dan juga tidak dapat disederhanakan menjadi bilangan bulat sehingga pasti selalu menghasilkan bilangan irrasional. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 5 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami konsep penjumlahan bilangan irrasional dengan tidak dapat memberikan bukti melalui counter example (contoh penyangkal) yaitu menjumlahkan bilangan irrasional dengan inversnya tidak selalu menghasilkan bilangan irrasional tapi bisa juga menghasilkan bilangan rasional yaitu 0. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep penjumlahan bilangan irrasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.



Jumlah dua bilangan irrasional adalah irrasional pula (YA)
Karena, bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dibentuk menjadi bilangan rasional dan juga tidak dapat disederhanakan menjadi bilangan bulat.

6. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 menjawab dengan benar bahwa tidak selalu hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah irrasional dengan memberikan bukti counter example (contoh penyangkal) yaitu $2\sqrt{6} \times 3\sqrt{6} = 6(6) = 36$. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 6 pada materi jenis-jenis bilangan real di mana subjek memberikan bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga dapat memberi contoh bahwa dengan mengalikan dua bilangan irrasional yang sama berbentuk akar seperti pada

contoh bisa menghasilkan bilangan rasional maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.

Tidak, Hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah Bukan irrasional
Contoh nya :

$$2\sqrt{6} \times 3\sqrt{6} = 6(6) \\ = 36$$

(8.5)

7. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S2 menjawab dengan salah bahwa hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional dengan alasan bilangan rasional selalu dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$ $b \neq 0$ dan dapat disederhanakan. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 7 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami konsep pembagian bilangan rasional dengan tidak dapat memberikan bukti melalui counter example (contoh penyangkal) yaitu bisa saja tidak selalu menghasilkan bilangan rasional jika penyebutnya 0, 0 bilangan rasional maka hasilnya adalah tak terdefinisi dan syarat untuk mendapatkan bilangan rasional adalah $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep pembagian dua bilangan rasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Ya, Hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional.
Karena, bilangan rasional dapat selalu dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ dan dapat disederhanakan. (2)

8. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S2 menjawab dengan salah jawaban bahwa hasil perkalian a bilangan rasional dan b bilangan irrasional adalah

bilangan irrasional namun subjek tidak memberikan alasan mengapa selalu menghasilkan bilangan irrasional. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep perkalian bilangan rasional dengan bilangan irrasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Jika a bilangan Rasional
 b bilangan Irrasional, maka akan membentuk bilangan Irrasional

9. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S2 menjawab dengan salah bahwa $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$ didapatkan dengan menggunakan sifat eksponen yaitu mengubah bentuk akar ke bentuk pangkat kemudian mengalikan pangkat dengan pangkat, namun hasil tersebut mestinya $\sqrt{a^2} = a$, untuk $a > 0$, dan $\sqrt{a^2} = -a$ untuk $a < 0$ karena akar dari suatu bilangan positif haruslah positif. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami pembuktian dengan menggunakan definisi nilai mutlak bahwa $\sqrt{a^2}$ adalah $|a|, \forall a \in \mathbb{R}$ sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Ya, $\sqrt{a^2} = a \forall a \in \mathbb{R}$
 Alasan:

$$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}}$$

$$= a^1$$

$$= a$$

 Contoh:

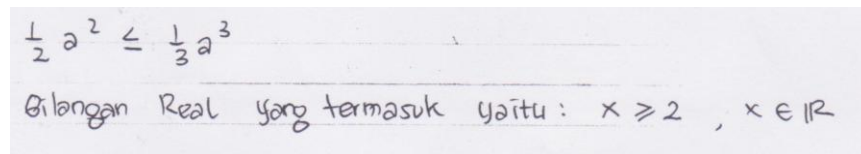
$$\sqrt{2^2} = 2^{\frac{2}{2}}$$

$$= 2^1$$

$$= 2$$

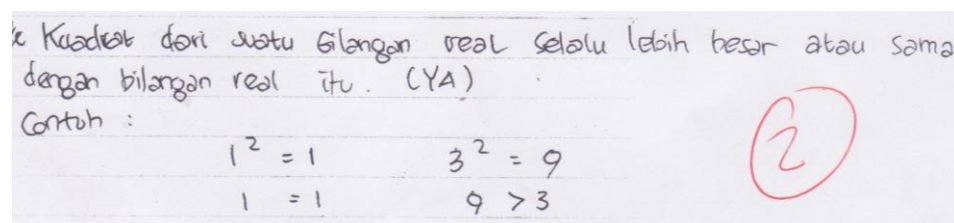
10. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 menjawab dengan benar namun belum lengkap bahwa nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq$

$\frac{1}{3}a^3$) adalah $x \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$, dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai x satu persatu ke dalam pertidaksamaan tapi tidak menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 10 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.



$\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$
Bilangan Real yang termasuk yaitu: $x \geq 2, x \in \mathbb{R}$

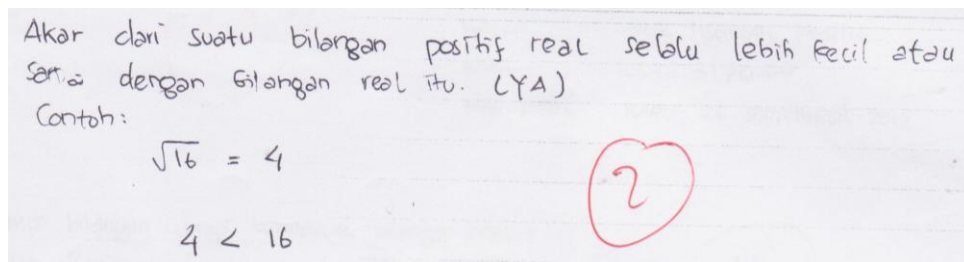
11. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 menjawab dengan salah bahwa kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu dengan hanya memberikan beberapa contoh kemudian menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua bilangan real dan belum dapat mencari himpunan penyelesaian serta mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku dengan menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep kuadrat bilangan real, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.



Kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu. (YA)
Contoh :
 $1^2 = 1$ $3^2 = 9$
 $1 = 1$ $9 > 3$

12. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 menjawab dengan salah bahwa akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan real itu

dengan hanya memberikan satu contoh dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua bilangan real dan belum dapat mencari himpunan penyelesaian serta mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku dengan menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep akar dari bilangan real, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.



- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Aljabar pada Bilangan Real**

13. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S2 menjawab dengan benar dengan alasan yang tepat dengan menggunakan teorema $-1(a) = (-a)$ dengan memisalkan $a = a + b$, ini juga merupakan penyimbolan yang kurang tepat karena a yang diruas kiri berbeda dengan a yang diruas kanan. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 13 pada materi sifat aljabar pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $-(a+b) = (-a) + (-b)$

Solusi: $-(a+b) = -a-b$

Bukti: Berdasarkan teorema $-1 \cdot a = -a$, a dimisalkan $a+b$

$$\begin{aligned}
 -(a+b) &= (-1) \cdot (a+b) \\
 &= (-1) \cdot a + (-1) \cdot b \quad \text{"Sifat distributif"} \\
 &= -a + (-b) \quad \text{"Terbukti"}
 \end{aligned}$$

14. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 menjawab dengan benar walaupun ada langkah-langkah yang terlewat (tidak sistematis) dan alasan yang tidak tepat. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 14 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

$$\begin{aligned}
 3(2x + \frac{1}{3}) &= 4(3x - \frac{1}{2}) \\
 6x + 1 &= 12x - 2 \quad \text{(Sifat distributif)} \\
 6x + 1 + (-1) &= 12x - 2 + (-1) \quad \text{(Kedua ruas dijumlahkan (-1))} \\
 6x &= 12x - 3 \\
 6x + 3 &= 12x - 3 + 3 \quad \text{(Sifat operasi penjumlahan (+3))} \\
 6x + 3 &= 12x - 0 \quad \text{(Identitas penjumlahan)} \\
 6x + 3 + (-12x) &= 12x + (-12x) \quad \text{(Sifat operasi penjumlahan (-12x))} \\
 6x + (-12x) + 3 &= 0 \quad \text{(Sifat komutatif)} \\
 -6x + 3 &= 0 \\
 -6x + 3 + (-3) &= 0 + (-3) \quad \text{(Kedua ruas dijumlahkan (-3))} \\
 -6x &= -3 \\
 -\frac{1}{6} \cdot -6x &= -3 \cdot -\frac{1}{6} \quad \text{(Sifat operasi perkalian)} \\
 x &= \frac{3}{6} \quad \text{(Berdasarkan teorema } (-1) \cdot (-1) = 1) \\
 x &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

- **Pemahaman terhadap Materi Pembuktian Bilangan Rasional**

15. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 tidak mampu membuktikan soal dengan benar, banyak langkah-langkah yang terlewati (tidak sistematis) dan alasan yang tidak jelas dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 15 pada materi pembuktian bilangan rasional, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami karena tidak dapat menunjukkan suatu bilangan merupakan bilangan rasional atau bukan melalui bukti kontradiksi. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep bilangan rasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Buktikan bahwa $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional!

Solusi :

Diketahui : $t = \sqrt{21}$
 $t = 21$

$t = \frac{a^2}{b^2}$

$21 = \frac{a^2}{b^2}$

$a^2 = 21 b^2$

a adalah faktor kelipatan dari 1, 3, 7

demisalkan

$a = 21 k$

$a^2 = 441 k^2$

Maka,

$21 b^2 = 441 k^2$

$b^2 = 21 k^2$

Jadi Terbukti bahwa $\sqrt{21}$ bukan bilangan Rasional

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Urutan pada Bilangan Real**

16. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, walaupun subjek S2 mampu membuktikan soal dengan benar melalui langkah-langkah pembuktian yang tepat walaupun dengan alasan yang tidak tepat dan lengkap karena terkesan menghafal. Setelah menganalisis hasil tes uraian pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Jika $a < b$ dan $c < d$, buktikan bahwa $ad + bc < ac + bd$

Solusi: $a < b \Rightarrow a - b < 0$
 $c < d \Rightarrow c - d < 0$

$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$ (Sifat distributif)

$ac - ad - bc + bd > 0$ (Sifat komutatif)

$ac + bd > ad + bc$

Jadi, $ad + bc < ac + bd$

17. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 tidak mampu menjawab soal dengan benar karena banyak konsep-konsep prasyarat yang tidak diketahui. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 17 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bagaimana mencari himpunan penyelesaian berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep dalam menentukan himpunan penyelesaian melibatkan operasi himpunan, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

$$\begin{aligned}
 1 < x^2 < 4 \\
 1 + (-1) < x^2 < 4 + (-1) \\
 0 < x^2 < 3
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 1 < x^2 < 4 \\
 (-4) + 1 < x^2 < 4 + (-4) \\
 -3 < x^2 < 0
 \end{aligned}$$

Handwritten notes on the number line diagram include:

- $0 > 0 - x^2 + x$
- $0 > 0 + x^2 - x$
- $1 > 8 - x - 3 + 5x$
- $1 > (5-x)(p+x)$
- $H_p: \{x \mid -3 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$
- $0 > (1+x)(5-x)$

At the bottom, there is a handwritten sentence: "Bilangan real x yang memenuhi persamaan $1 < x^2 < 4$ yaitu bilangan $-2, \dots, 2$ ".

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Kelengkapan pada Bilangan Real**

18. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S2 tidak mampu mendeskripsikan konsep-konsep yang terkait dengan lengkap, mendalam dan secara simbolis kemudian masih ada alasan yang tidak jelas (terkesan hanya menghafal secara mekanis). Setelah menganalisis hasil tes uraian tersebut pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

• **Batas Atas** : Bila suatu himpunan memiliki batas Atas
 $S \subseteq \mathbb{R}$

$u \geq s$ "Batas Atas"
 u adalah nilai teratas keatas

• **Batas Bawah**
 $S \subseteq \mathbb{R}$

$u \leq s$ "Batas Bawah"
 u adalah nilai terbawah ke bawah

• **Supremum**

Nilai terkecil pada batas atas meskipun tidak termasuk anggota

• **Infimum**

Nilai terbesar pada batas bawah meskipun tidak termasuk himpunan

• **Maksimum** : Nilai terbesar pada suatu himpunan

• **Minimum** : Nilai terkecil pada suatu himpunan

19. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang lengkap. Setelah menganalisis hasil tes

uraian nomor 19 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Contoh yg memiliki Batas Atas dan Batas Bawah
 $G \subseteq \mathbb{R}$
 ~~$G = \{1, 2, 3, 4\}$~~ $G = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
 Batas Atas = 3, 4, 5, ...
 Batas Bawah = -1, -2, -3, ...

20. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 tidak mampu memberikan contoh yang benar dengan alasan yang kurang jelas dan lengkap. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep terbatas, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Contoh yang memiliki Batas Atas dan Tidak memiliki Batas Bawah
 $F \subseteq \mathbb{R}$
 ~~$F = \{2n+1, n=1, 2, 3, \dots\}$~~ $F = \{2n+1, n \in \mathbb{R}\}$
 $F = (\text{Bilangan Bulat Negatif}) \Rightarrow F = [-3, -1]$
 Batas Atas = -1
 Batas Bawah = -

21. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S2 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 21 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Contoh himpunan memiliki batas bawah dan tidak memiliki batas atas
 $E \subseteq \mathbb{N}$
 $E = \{2n+1, n=1, 2, 3, \dots\}$
 Batas Atas = —
 Batas Bawah = 3, 2, 1, ...

22. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 22 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Contoh Himpunan \neq Batas Atas dan \neq Batas Bawah.

$$M \subseteq \mathbb{R}$$

$$M = \{2^n + n\}, n \in \mathbb{R}$$

$$\text{Batas Atas} = -$$

$$\text{Batas Bawah} = -$$

23. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 tidak mampu memberikan contoh yang benar. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 23 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep infimum pada suatu himpunan bilangan, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Contoh Himpunan memiliki Supremum dan \neq Infimum

$$M \subseteq \mathbb{R}$$

$$M = \{3n + 1, n = 1, 2, 3, \dots\} n \in \mathbb{N}$$

$$M = [-3, 1] M \subseteq \mathbb{R}$$

$$M = [-3, 1]$$

24. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 mampu memberikan contoh yang benar namun tidak memberikan alasan. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 24 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Contoh Himpunan memiliki Infimum dan \neq Supremum
 $E \subseteq \mathbb{N}$
 $E = \{3n+1, n=1, 2, 3, \dots\} \quad n \in \mathbb{N}$
 $E \subseteq \mathbb{R} \quad E \subseteq \mathbb{N}$
 $E = \{ \quad \quad \quad E = \{3n+1, n=1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}\}$

25. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S2 mampu memberikan contoh yang benar namun tidak memberikan alasan. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 25 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Contoh Himpunan \neq Infimum & \neq Supremum
 $M \subseteq \mathbb{R}$
 $M \subseteq \mathbb{R}$
 $M = \{2^n + n\} \quad n \in \mathbb{R}$

26. Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S2 mampu memberikan jawaban tetapi tidak sepenuhnya benar dengan alasan yang kurang tepat dan jelas. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 26 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

9. Dik : $S = \{(-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$
 Solusi:
 $N = 1, 2, 3, 4, \dots$
 $S = \{(-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}\}$
 $= (-1)^1 \cdot \frac{1}{2(1)+1}$
 $= -1 \cdot \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Batas Atas} & = & -\frac{1}{3} \text{ (Tidak Terbatas)} \\
 \text{Batas Bawah} & = & -\frac{1}{3}, -1, -2, \dots \\
 \text{Supremum} & = & \text{Tidak Ada} \\
 \text{Infimum} & = & -\frac{1}{3}
 \end{array}$$

2) Penyajian Data Pemahaman Subjek S2 dalam menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real melalui Metode Wawancara.

Berikut ini adalah petikan wawancara dengan Subjek S2 tentang pemahaman dalam menyelesaikan soal-soal pada materi Sistem Bilangan Real I, disertai dengan interpretasinya.

• Pemahaman terhadap Materi Jenis-jenis Bilangan Real

Transkrip wawancara 1 nomor 1

- P2.1.1.1 : ok, kita mulai wawancara pertama yaitu tes sistem bilangan real yaitu ada beberapa pertanyaan, ada 12. Jadi menurut kamu jenis-jenis bilangan apa saja yang termasuk bilangan real itu? ... silahkan ditulis, ... sebentar dijelaskan
- S2.1.1.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit)
- P2.1.1.2 : iya, coba disebutkan bilangan apa saja itu!
- S2.1.1.2 : bilangan yang termasuk dalam sistem bilangan real, yang pertama bilangan rasional kemudian juga irrasional, bilangan pecahan, bilangan bulat, bilangan ganjil, bilangan genap, bilangan asli, bilangan prima, bilangan komposit dan juga bilangan cacah.
- P2.1.1.3 : ya, bisa dijelaskan mulai dari bilangan real itu sendiri?
- S2.1.1.3 : kalo bilangan real itu sendiri adalah bilangan yang menghimpun beberapa bilangan trus bilangan real ... bilangan yang bersifat real atau nyata, jadi sistem bilangan real ... e ... bercabang 2 rasional dan juga irrasional kemudian rasional itu sendiri terbagi atas 2 yaitu bilangan pecahan dan juga bilangan bulat
- P2.1.1.4 : iya trus
- S2.1.1.4 : kemudian bilangan bulat di sini terbagi atas 3 bulat negatif, 0 dan juga positif, nah pada bilangan bulat positif juga termasuk bilangan asli dan kalo untuk 0 dan juga bilangan positif ada ... disebut juga sebagai bilangan cacah
- P2.1.1.5 : 0 dan bilangan positif?
- S2.1.1.5 : ya

P2.1.1.6 : 0,1 ,2 dan seterusnya yang dimulai dari angka 0 adalah bilangan?
 S2.1.1.6 : cacah
 P2.1.1.7 : cacah, trus apalagi?
 S2.1.1.7 : trus mmm bilangan asli tadi sudah juga yang dimulai dari angka 1
 P2.1.1.8 : oh ya trus
 S2.1.1.8 : bilangan bulat kemudian bilangan prima
 P2.1.1.9 : ya, bilangan prima?
 S2.1.1.9 : bilangan yang hanya dapat dibagi dengan bilangan itu sendiri dan juga angka 1
 P2.1.1.10 : ok
 S2.1.1.10 : cuman 2 faktor
 P2.1.1.11 : kemudian prima itu masuk bilangan apa?
 S2.1.1.11 : asli
 P2.1.1.12 : asli? Komposit?
 S2.1.1.12 : komposit itu juga termasuk bilangan asli
 P2.1.1.13 : selain bilangan yang anda sebutkan di sini sudah tidak ada bilangan lagi yang anda tahu masuk pada bilangan real?
 S2.1.1.13 : mmm ... satu, iya nda adami
 P2.1.1.14 : maksudnya satu apa itu?
 S2.1.1.14 : kan satu terbagi emmm ... bilangan satu itu termasuk di prima , komposit, bertemanki dengan ... apa itu tadi bilangan asli
 P2.1.1.15 : teman dengan bilangan asli?
 S2.1.1.15 : iya, jadi bilangan asli ini juga terbagi dari angka 1, prima dan juga komposit
 P2.1.1.16 : oh begitu ya, yang mau saya tanyakan mulai dari awal, kan tadi bilangan real terbagi atas 2 bilangan rasional dan irrasional, kemudian apa yang dimaksud bilangan rasional?
 S2.1.1.16 : bilangan rasional itu bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$ dimana e ... polanya itu bisa berulang
 P2.1.1.17 : di mana?
 S2.1.1.17 : pola pada bilangan desimal bisa berulang
 P2.1.1.18 : oh pola pada bilangan desimal bisa berulang?
 S2.1.1.18 : iya
 P2.1.1.19 : begitu?
 S2.1.1.19 : iya
 P2.1.1.20 : maksudnya yang berulang itu bagaimana?
 S2.1.1.20 : berulang itu angkanya ... angka di belakang koma
 P2.1.1.21 : ya coba berikan 1 contoh
 S2.1.1.21 : contohnya 2, 131313 ...
 P2.1.1.22 : oh yang begitu
 S2.1.1.22 : he ... he ... yang begitu

- P2.1.1.23 : trus bilangan rasional kan tadi dibilang bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$ toh?
- S2.1.1.23 : iya, samaji pecahan tapi bedanya kalo pecahan itu e ... bentuknya menghasilkan bilangan bulat, kalo misalnya rasional itu bisa tidak menghasilkan bilangan bulat
- P2.1.1.24 : tidak menghasilkan bilangan bulat?
- S2.1.1.24 : he em (mengiyakan) e ... bilangan desimal yang tadi ... yang ... bilangan desimal
- P2.1.1.25 : iye, tunggu dulu ... tunggu dulu yah maksudnya diperjelas dulu yah, coba ulangi tadi pengertian bilangan rasional adalah?
- S2.1.1.25 : bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$ dimana bentuknya yaitu bisa berbentuk pecahan desimal yang angka di belakang komanya itu berulang ... ya polanya berulang trus ituji bilangan rasional
- P2.1.1.26 : kemudian bilangan rasional lagi e ... apa ... maksud saya kan tadi dibilang terdiri atas beberapa macam bilangan rasional itu?
- S2.1.1.26 : bilangan rasional itu terdiri atas bilangan pecahan dan juga bilangan bulat
- P2.1.1.27 : mm ... yang saya mau tanyakan ... e ... apa pengertiannya dari bilangan pecahan dan apa pengertiannya bilangan bulat?
- S2.1.1.27 : ehmm ... (ketawa kecil) bilangan pecahan adalah bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$ dimana $b \neq 0$ ituji
- P2.1.1.28 : ituji?
- S2.1.1.28 : iya
- P2.1.1.29 : tadi kan kenapa lebih ... kan bilangan rasional tadi anda hanya bilang $\frac{a}{b}$, tidak ada $b \neq 0$
- S2.1.1.29 : ba ... kulupai
- P2.1.1.30 : oh, dilupa? Jadi bilangan rasional adalah adalah?
- S2.1.1.30 : bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$
- P2.1.1.31 : jadi apa bedanya bilangan rasional dan bilangan pecahan di sini dilihat dari sisi definisi?
- S2.1.1.31 : e ... mungkin ada definisinya lagi yang kulupai tapi bentuknya itu kalo misalnya bilangan rasional pasti hasilnya, hasilnya itu yang berbentuk pola yang berulang
- P2.1.1.32 : iya
- S2.1.1.32 : tapi kalo pecahan akan berbentuk ... akan berbentuk bilangan bulat
- P2.1.1.33 : eh ... kenapa pecahan bisa berbentuk bilangan bulat he ... he ... (ketawa), bilangan pecahan adalah?
- S2.1.1.33 : bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$ di mana a itu adalah bilangan as ... bilangan bulat dan b nya itu adalah bilangan asli dan b itu tidak sama dengan 0

P2.1.1.34 : tidak sama dengan 0?
 S2.1.1.34 : itumi kak deh, janganmi tambah-tambahi tambah pusingka
 P2.1.1.35 : oh begitu di?
 S2.1.1.35 : iya
 P2.1.1.36 : ini lagi kan lebih luaski sede syaratnya , maksudnya
 S2.1.1.36 : iya
 P2.1.1.37 : pengertiannya, definisinya pecahan itu banyak ternyata toh?
 S2.1.1.37 : iya
 P2.1.1.38 : tapi bilangan rasional sendiri anda bilang bilangan yang dapat dinyatakan $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ tadi dilupa katanya b itu bilangan apa ... a ... bilangan asli? Apa?
 S2.1.1.38 : a itu bilangan bulat
 P2.1.1.39 : b?
 S2.1.1.39 : b itu bilangan asli
 P2.1.1.40 : itu pengertian apa? Bilangan?
 S2.1.1.40 : pecahan
 P2.1.1.41 : kalo bilangan rasional?
 S2.1.1.41 : samaji kak e ... tapi bedanya itu mungkin bentuk akhirnya yang beda
 P2.1.1.42 : oh, bentuk akhirnya saja yang beda? He ... he ... jadi kalo bilangan bulat itu sendiri apa?
 S2.1.1.42 : bilangan bulat ... bilangan bulatki tidak terpecah-pecah
 P2.1.1.43 : ya ... iya saya tahu tapi apa definisinya menurut anda?
 S2.1.1.43 : e ... kalo bilangan bulat itu bilangan yang terdiri dari bilangan negatif, 0 dan juga bilangan bulat positif
 P2.1.1.44 : bilangan bulat positif?
 S2.1.1.44 : iya
 P2.1.1.45 : ya ... yang ini lagi saya mau tahu apa perbedaan bilangan rasional dan bilangan pecahan , itu dulu ...
 S2.1.1.45 : bedanya itu kak terletak dari hasil akhir dan polanya kalo misalnya itu pecahan bisa saja polanya itu tidak berulang
 P2.1.1.46 : oh begitu?
 S2.1.1.46 : iya
 P2.1.1.47 : pecahan bisa saja polanya tidak berulang
 S2.1.1.47 : he em (mengiyakan)
 P2.1.1.48 : sedangkan rasional?
 S2.1.1.48 : berulang
 P2.1.1.49 : berulang?
 S2.1.1.49 : iya
 P2.1.1.50 : bisa kasih saya contoh bilangan rasional mana tulis ... coba tulis, mana bilangan rasional mana bilangan pecahan supaya saya tahu apa

bedanya bilangan rasional dengan bilangan pecahan... ya coba ditulis!

- S2.1.1.50 : kalo hasil akhirnya itu 2, ... misalnya 21,123123 itu kan berulang
P2.1.1.51 : iya
S2.1.1.51 : nah kalo misalnya bilangan pecahan mungkin saja hasilnya itu cuma 2,1 tidak berulangki polanya atautkah 2,134 tapi tidak berulang
P2.1.1.52 : oh tidak berulang kalo pecahan?
S2.1.1.52 : kalo pecahan
P2.1.1.53 : oh iya trus e ... lanjut tadi bilangan bulat kan ... e ... bilangan bulat lagi kita bicara masalah bilangan bulat itu, coba dijelaskan lagi bilangan bulat itu terdiri atas apa?
S2.1.1.53 : kalo bilangan bulat itu sendiri terdiri atas bilangan bulat negatif, 0 dan juga bilangan bulat positif
P2.1.1.54 : bilangan bulat positif?
S2.1.1.54 : iye
P2.1.1.55 : apa itu bilangan asli?
S2.1.1.55 : bilangan asli adalah bilangan yang dimulai dari angka 1
P2.1.1.56 : 1?
S2.1.1.56 : asli
P2.1.1.57 : 1?
S2.1.1.57 : ya
P2.1.1.58 : sampai?
S2.1.1.58 : 1 sampai tak terhingga
P2.1.1.59 : tak terhingga
S2.1.1.59 : iya
P2.1.1.60 : ok, kemudian tadi bilangan prima itu adalah bilangan?
S2.1.1.60 : bilangan prima adalah bilangan yang dapat dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri dan bilangan prima itu termasuk dalam bilangan asli
P2.1.1.61 : ya, ok saya tanya lagi, bilangan prima kan e ... bilangan asli yang dapat dibagi dengan dirinya sendiri dan ...?
S2.1.1.61 : satu
P2.1.1.62 : satu?
S2.1.1.62 : iye
P2.1.1.63 : apa maksudnya dapat dibagi dengan dirinya sendiri dan 1?
S2.1.1.63 : relatif prim mungkin
P2.1.1.64 : tunggu ... tunggu dulu yang saya tanyakanki adalah bilangan prima
S2.1.1.64 : namanya juga bilangan prima kak
P2.1.1.65 : ya, maksudnya, apa maksudnya itu bilangan prima adalah tadi bilangan yang menurut anda yah dapat dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri, apa maksudnya itu yang dapat dibagi?
S2.1.1.65 : yang hanya memiliki 2 faktor
P2.1.1.66 : ok .. ok kita lanjut lagi pada bilangan komposit , bilangan komposit adalah?

S2.1.1.66 : bilangan yang mempunyai faktor lebih dari 2.

P2.1.1.67 : bilangan yang mempunyai faktor lebih dari 2, a ... ini lagi maksudnya apa, apa maksudnya mempunyai faktor lebih dari 2?

S2.1.1.67 : Mempunyai faktor lebih dari 2?

P2.1.1.68 : iya apa maksudnya?

S2.1.1.68 : kan misalnya pada ... faktor prima toh faktor prima kan ada bilangan-bilangannya, nah komposit itu juga samaji kak

P2.1.1.69 : contoh-contoh pale

S2.1.1.69 : contohnya angka 8

P2.1.1.70 : he em

S2.1.1.70 : dia dapat dibagi dengan 2, jadi dia mempunyai ... karna 8 itu bisa dibagi dengan 2, bisa dibagi dengan 4 dan bisa dibagi dengan 8

P2.1.1.71 : hanya itu?

S2.1.1.71 : bisa dibagi dengan 1

P2.1.1.72 : oh, iya tadi saya lupa yah apa yang dimaksud bilangan irrasional dulu tadi?

S2.1.1.72 : bilangan irrasional bilangan yang ketika dibagi, ketika dioperasikan itu bilangan ... irrasional tidak menghasilkanki bilangan yang berulang

P2.1.1.73 : tidak menghasilkanki bilangan yang berulang?

S2.1.1.73 : iye, dia itu bertolak belakang dari bilangan rasional

P2.1.1.74 : definisinya itu? Definisi bilangan rasional?

S2.1.1.74 : iye, irrasional

P2.1.1.75 : masih ada lagi definisi bilangan irrasional lagi yang ditahu?

S2.1.1.75 : irrasional

P2.1.1.76 : masih ada definisi yang lain?

S2.1.1.76 : bilangan irrasional ... ituji kak, bilangan yang tidak mempunyai pola

P2.1.1.77 : itu saja?

S2.1.1.77 : dan irrasional itu e ... tidak menghasilkan bilangan yang bulat ketika dibagi

P2.1.1.78 : iya, itu?

S2.1.1.78 : he em dan tidak berpola

P2.1.1.79 : contohnya bilangan irrasional?

S2.1.1.79 : $\sqrt{2}$, $\frac{22}{7}$

P2.1.1.80 : apalagi ... ha ... $\frac{22}{7}$ (heran) ... $\frac{22}{7}$? irrasional, masuk irrasional

S2.1.1.80 : he em mmm ... tidak tau de kak, jangan meki, π (phi)

P2.1.1.81 : tadi kan ada bilangan $\sqrt{2}$, apakah juga $\frac{22}{7}$ bilangan irrasional?

S2.1.1.81 : irrasional? Iya

P2.1.1.82 : trus apalagi? π (phi), π juga bilangan irrasional, trus apalagi?

S2.1.1.82 : bilangan logaritma

P2.1.1.83 : logaritma? Iya?

S2.1.1.83 : iya
P2.1.1.84 : apalagi?
S2.1.1.84 : ituji kak, sinus

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 bisa menyebutkan dengan benar jenis-jenis bilangan real namun tidak mampu menjelaskan definisi bilangan tersebut dengan baik secara simbolik bilangan-bilangan tersebut khususnya bilangan rasional, bilangan irrasional dan bilangan pecahan, membedakan antara satu bilangan dengan bilangan yang lain, adapun diantara kesalahan yang dilakukan subjek adalah:

- a. Subjek mengatakan bahwa bilangan rasional berbentuk desimal dengan pola yang berulang dan bilangan pecahan berbentuk desimal yang tak berulang maksudnya subjek menganggap bahwa 2,1 berhenti pada nilai 1 padahal 2,1 sebenarnya desimal berulang juga yaitu 2,10000000 ... berulang di nilai 0.
- b. Subjek tidak mampu mendefinisikan dengan tepat bilangan pecahan dan bilangan rasional, contohnya: Subjek mengatakan bahwa definisi bilangan rasional dan pecahan, sama tidak ada bedanya yaitu: bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$ di mana a itu adalah bilangan bulat dan b -nya itu adalah bilangan asli dan $b \neq 0$
- c. Subjek tidak mampu mendefinisikan dengan tepat konsep bilangan prima, contohnya: subjek menyamakan definisi antara konsep bilangan prima dan relatif prim.

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.1.1.2; S2.1.1.3; S2.1.1.4; S2.1.1.7; S2.1.1.8; S2.1.1.9; S2.1.1.11; S2.1.1.12; S2.1.1.14; S2.1.1.16; S2.1.1.17; S2.1.1.21; S2.1.1.23; S2.1.1.26; S2.1.1.27; S2.1.1.29; S2.1.1.30; S2.1.1.33; S2.1.1.45; S2.1.1.50;

S2.1.1.66; S2.1.1.72 dan S2.1.1.79] atas pertanyaan [P2.1.1.2; P2.1.1.3; P2.1.1.4; P2.1.1.7; P2.1.1.8; P2.1.1.9; P2.1.1.11; P2.1.1.12; P2.1.1.14; P2.1.1.16; P2.1.1.17; P2.1.1.21; P2.1.1.23; P2.1.1.26; P2.1.1.27; P2.1.1.29; P2.1.1.30; P2.1.1.33; P2.1.1.45; P2.1.1.50; P2.1.1.66; P2.1.1.72 dan P2.1.1.79] yang diajukan oleh peneliti.

Pada wawancara pertama ini subjek sudah bisa menyebutkan dengan benar jenis-jenis bilangan real namun belum mampu mendefinisikan dengan baik bilangan-bilangan tersebut, membedakan antara satu bilangan dengan bilangan yang lain. Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 1 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada jawaban soal nomor 1 adalah pemahaman instrumental..

Transkrip wawancara I nomor 2

- P2.2.1.1 : Ya nomor 2. Menurut kamu, adakah bilangan real yang paling mendekati bilangan nol? jika ada berikan contoh? Jika tidak, mengapa?
- S2.2.1.1 : Ada. Karna banyak sekali makanya namanya tidak ada.
- P2.2.1.2 : Ih, jadi yang mana yang betul? He ... he ... (sambil tertawa) ada?
- S2.2.1.2 : Ada, karna banyak sekali sehingga tidak bisaki disebutkan semuanya tapi kalo contohnya hanya 1 bisaji.
- P2.2.1.3 : Ih, contohnya pale?
- S2.2.1.3 : Contohnya yang lebih dekat itu adalah 0,000000 ... sampaina mengelilingi lapangan ...1
- P2.2.1.4 : Oh, begitu?
- S2.2.1.4 : ada tapi karna banyaknya sehingga dia disebut tidak ada
- P2.2.1.5 : Ih, apa maksudnya jadi kan ini pertanyaannya ada atau tidak ada
- S2.2.1.5 : Ada dan banyak sekali
- P2.2.1.6 : Hi ... hi ... ada dan banyak sekali?
- S2.2.1.6 : Iya, karna misalnya kalo bilangka 0,01 ih ternyata ada lebih dekat lagi 0,0000001
- P2.2.1.7 : Begitu?
- S2.2.1.7 : Iye, jadi ada dan banyak sekali.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 salah dalam menjawab soal, subjek mengatakan bahwa ada dan banyak bilangan real yang paling mendekati bilangan nol, karna banyak sekali sehingga subjek tidak dapat menentukan mana bilangan real yang paling mendekati 0, jadi subjek menyimpulkan bahwa tidak ada bilangan real yang paling mendekati 0. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.2.1.1; S2.2.1.2; S2.2.1.3 dan S2.2.1.6] atas pertanyaan [P2.2.1.1; P2.2.1.2; P2.2.1.3 dan P2.2.1.6] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 2 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami karena tidak dapat menunjukkannya melalui bukti kontradiksi. Dengan demikian, subjek S1 tidak memahami konsep bilangan real dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 3

- P2.3.1.1 : nomor 3, apakah bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 berhingga banyaknya atau tidak berhingga banyaknya. Jelaskan pendapatmu!
- S2.3.1.1 : tidak terhingga
- P2.3.1.2 : mengapa?
- S2.3.1.2 : karna banyak sekali bilangan antara 1 dan 3, 1 saja sampai 2 deh, nabisami terhitung milyaran apalagi 1 sampai 3 deh banyak sekalimi itu kak
- P2.3.1.3 : kenapa disebut banyak sekali diantara 1 sampai 2 saja nah banyak
- S2.3.1.3 : karna memang banyak bilangan yang terdapat di dalamnya
- P2.3.1.4 : bilangan apa saja itu?
- S2.3.1.4 : banyak sekali kak, kalo kusebutkan tidak habiski malam
- P2.3.1.5 : maksudku contohnya saja bilangan apa yang banyak antara 1 dan 2

- S2.3.1.5 : 1 dan 2 itu dimulai dari 1 setengah, $1\frac{1}{4}$, 1,08, 1,09, $1\frac{1}{8}$, $1\frac{1}{9}$, $1\frac{2}{3}$
 banyak sekali kak
 P2.3.1.6 : banyak sekali?
 S2.3.1.6 : iye, 1 akar 2, nda ... ndaji
 P2.3.1.7 : he ... he ...
 S2.3.1.7 : banyak sekali ... banyak sekali
 P2.3.1.8 : tadi $1\sqrt{2}$
 S2.3.1.8 : $1 + \sqrt{2}$ kak, tidak ada $1\sqrt{2}$, kalo $\sqrt{2}$ itu artinya ...
 P2.3.1.9 : iya kalo $\sqrt{2}$ itu?
 S2.3.1.9 : eh kalo $\sqrt{2}$ itu kak, salah kak ... e ... pasti 1 komai toh, $\sqrt{2}$ jadi salai kak, khilafka tadi
 P2.3.1.10 : maksudnya tadi kan saya bilang antara 1 dan 2?
 S2.3.1.10 : ya ... he em
 P2.3.1.11 : jadi $\sqrt{2}$ itu masuk di mana?
 S2.3.1.11 : $\sqrt{2}$ itu masukki memang di ini 1 dan 2
 P2.3.1.12 : masuk antara 1 dan 2?
 S2.3.1.12 : iye

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 mampu menjawab dengan benar soal tersebut, namun tidak mampu menjelaskan alasan mengapa diantara bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 berhingga banyaknya bilangan real dan belum dapat menunjukkan buktinya secara matematis. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.3.1.1; S2.3.1.2; S2.3.1.5; S2.3.1.6; S2.3.1.8 dan S2.3.1.11] atas pertanyaan [P2.3.1.1; P2.3.1.2; P2.3.1.5; P2.3.1.6; P2.3.1.8 dan P2.3.1.11] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 3 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada jawaban soal nomor 3 adalah pemahaman instrumental.

Transkrip wawancara I nomor 4

- P2.4.1.1 : kita masuk ke nomor 4, apakah bilangan 2,32110111011101
adalah bilangan rasional atau bilangan irrasional? Berikan alasan!
- S2.4.1.1 : bilangan rasional
- P2.4.1.2 : iya mengapa dikatakan bilangan rasional?
- S2.4.1.2 : karna dilihat dari bentuk dan polanya merupakan bilangan yang
berulang apalagi kalo dikerjakan pasti berulang
- P2.4.1.3 : pasti berulang?
- S2.4.1.3 : iye
- P2.4.1.4 : ok, bisa anda buktikan bahwa dia bilangan rasional?
- S2.4.1.4 : iye kak, kukerjaki pale. (subjek mengerjakan soal selama beberapa
menit)
- P2.4.1.5 : ok, ini kan ... bagaimana cara membuktikannya, bisa dijelaskan?
- S2.4.1.5 : trus, setelah itu e ... setiap bilangan ... setiap e ... angka e , setiap
tanda koma yang berpindah akan dikalikan dengan ... apakah itu
maksudnya , yang jelasnya toh kak e ... difokuskan di sini mau
dihabiskan yang mau dihabiskan adalah bilangan berulangnya
- P2.4.1.6 : ya ... ya ... ok ... ok, kan di sini ... ya ... ya terus bagaimana ini, ini
kenapa bisa dari 2,321101110 menjadi 2321101110, kenapa bisa dari
sini ke sini
- S2.4.1.6 : ini dikalikan dengan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (menghitung angka
dibelakang koma) dikalikan dengan 1 Milyar
- P2.4.1.7 : kenapa tidak ditulis saja? Apanya yang dikalikan? Kenapa bisa?
- S2.4.1.7 : ini dikalikan dengan ini kak (sambil menunjuk soal)
- P2.4.1.8 : ini x , apa ini x ?
- S2.4.1.8 : perumpamaan bilangannya
- P2.4.1.9 : apa maksudnya perumpamaan bilangan?
- S2.4.1.9 : e ... bilangan rasionalnya kalo x -nya ini berbentuk $\frac{a}{b}$ maka dia adalah
bilangan rasional
- P2.4.1.10 : tapi kenapa ini dikalikan x ? apa maksudnya 1 Milyar kali x ?
- S2.4.1.10 : x -nya itu kan ini kak ... e ... diumpamakan 2,321101110 ...
diumpamakan sebagai x .
- P2.4.1.11 : iya tadi kan dibilang $x = \frac{a}{b}$, makanya saya bingung yang mana ini?
- S2.4.1.11 : ya kak trus ... trus hasilnya ini
- P2.4.1.12 : ya kemudian ini 2,32110?
- S2.4.1.12 : a ... samaji kak dikalikanki dengan ... dengan 100 ribu
- P2.4.1.13 : ok
- S2.4.1.13 : he em, x -nya itu dikalikan dengan 100 ribu makanya dapatki
232110,110 ... sekian ... sekian
- P2.4.1.14 : menghasilkan?

S2.4.1.14 : menghasilkan
 P2.4.1.15 : diapakan ini setelah ini?
 S2.4.1.15 : setelah itu kan otomatis di sini bilangan berulangnya akan habis
 P2.4.1.16 : kenapa habis? Diapai?
 S2.4.1.16 : dikurangkan, e ... setelah dikurangkan dapatmi itu kak, dapatmi ... e
 $9.900.000 \times = 2.320.869.000$
 P2.4.1.17 : 3 nol-nya? (sambil melihat hasil pekerjaan subjek S2)
 S2.4.1.17 : e ... liatka bedeng kak ...
 P2.4.1.18 : e ... iya 3
 S2.4.1.18 : 3 nol-nya?
 P2.4.1.19 : iya, ok, sekarang sebegini dari sini ke sini, kenapa menghapuskan 3
 angka di belakang
 S2.4.1.19 : ini kan kak samaji 0 dengan 0
 P2.4.1.20 : adakah konsep seperti itu?
 S2.4.1.20 : ada ... anu ... membagi bilangan, kalo misalnya ... ada kak
 P2.4.1.21 : jadi kalo saya bilang begini $\frac{000}{000}$ atau $\frac{0}{0}$
 S2.4.1.21 : tidak kak
 P2.4.1.22 : tidak? Kenapa berlaku di sini?
 S2.4.1.22 : kan, ini kan kak bilangan apa itu namanya kak, kan bisa ji habis
 dibagi kak, adaji pembaginya jadi bilangan ituji juga
 P2.4.1.23 : apa pembaginya?
 S2.4.1.23 : kan pembaginya itu 9.900.000
 P2.4.1.24 : he em... (mengiyakan)
 S2.4.1.24 : nah, di atas yang di atas itu kebetulan e ... bisa ji dibagi, apakah
 namanya itu kak ... he ... yang jelas begitu
 P2.4.1.25 : kan tadi dibilang kalo 0/0 ...
 S2.4.1.25 : anu kak bilangan ... bilangan apa itu kak di'? yang jelasnya itu kak
 bisa dibagi tapi kulupai apa nama bilangannya.
 P2.4.1.26 : bisa dibagi?
 S2.4.1.26 : bisa dibagi, iye bisa dihapuskan
 P2.4.1.27 : dengan cara apa?
 S2.4.1.27 : eliminasi
 P2.4.1.28 : eliminasi?
 S2.4.1.28 : eliminasi 0 dengan 0
 P2.4.1.29 : ok begitu? kenapa palena kalo $\frac{0}{0}$ tidak bisa di kasi begini $\frac{0}{0}$
 S2.4.1.29 : karna toh kalo $\frac{0}{0}$ itu kan hasilnya memang 0 ji dan ini tidak
 mempunyai ki angka di depannya, bukanki merupakan puluhan he
 em bukanki merupakan angka puluhan
 P2.4.1.30 : 0 begitu?
 S2.4.1.30 : kan meskipun di sini sebagai satuan toh ... sebagai satuan ki, kalo
 memang di sini 0 otomatis tidak jadiki ini kak

P2.4.1.31 : seperti itu?

S2.4.1.31 : he em yang puluhanpi mulai kak baru berlakuki itu, nda tau teorema ... , yang jelasnya bukan teorema, bukan juga ketentuan, bukan yah?

P2.4.1.32 : ketentuan?

S2.4.1.32 : iye, syarat

P2.4.1.33 : ok... ok jadi ini 23.020.869

S2.4.1.33 : iye

P2.4.1.34 : hasilta? $\frac{\dots 869}{9900}$ yah, kenapa di sini 990 ribu?

S2.4.1.34 : a...(heran)

P2.4.1.35 : pekerjaanta yang lalu

S2.4.1.35 : apa kak?

P2.4.1.36 : di pekerjaanta yang lalu, tugasta, diujian tulisanta yang lalu kan sempat saya kasikan dulu yang saya suruh kerja, ya kenapa di sini hasilta 2.320.869?

S2.4.1.36 : he em

P2.4.1.37 : $\frac{2.320.869}{990.000}$, apa yang? Yang mana yang benar ini? Ujian tulisan anda atau ini yang sudah ...

S2.4.1.37 : satu, dua, tiga, empat, lima, lima (menghitung angka dibelakang koma) lima di' ... emm ...kurang 1 nolki kak di'

P2.4.1.38 : 990.000, ya di situ 9.900, yang mana yang ...?

S2.4.1.38 : 1

P2.4.1.39 : saya juga tidak bilang yah, ini yang benar

S2.4.1.39 : iya, tidakji kak, satu, dua, tiga, empat, lima (menghitung angka dibelakang koma) 100.000 iya kak, artinya salah mungkin di situ kak

P2.4.1.40 : salah di sini yang benar yang ini ?

S2.4.1.40 : he em (mengiyakan)

P2.4.1.41 : Kenapa bisa salah?

S2.4.1.41 : salah kalika mungkin kak

P2.4.1.42 : salah kali?

S2.4.1.42 : ataukah salah liatka ... 232110 anu kak, satu, dua, tiga, empat, lima anu kak itu mungkin di situ ... salah liatka (ketawa)

P2.4.1.43 : salah liatki? Ya?

S2.4.1.43 : ya, mungkin kak

P2.4.1.44 : oh ya ini kan di sini dikali 10.000 di sini tadi dikali 100.000

S2.4.1.44 : iya

P2.4.1.45 : jadi ini yang benar ini? yang sekarang ini?(menunjuk $\frac{2.320.869}{990.000}$)

S2.4.1.45 : ya, ini yang benar kak, kenapa salahka di situ? Apa kupikir itu?

P2.4.1.46 : ok, trus ini yah saya mau tanya lagi kenapa anda menggunakan cara seperti ini (dengan memisalkan $x = 2, 321101110110\dots$)?

S2.4.1.46 : karna iniji kak caranya yang kutau

P2.4.1.47 : di mana anda tahu?

S2.4.1.47 : dari kita
 P2.4.1.48 : dari saya?
 S2.4.1.48 : iya
 P2.4.1.49 : waktu saya mengajar?
 S2.4.1.49 : iye waktu kita ...
 P2.4.1.50 : kita tau alasannya kenapa ?
 S2.4.1.50 : tidak kutauki
 P2.4.1.51 : ok
 S2.4.1.51 : kasi tanya ma alasannya padeng kak.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 Secara keseluruhan subjek menjawab dengan benar soal tersebut dengan langkah-langkah yang tepat yaitu mengubah bentuk desimal berulang 2,32110111011101 ... menjadi bentuk $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ dengan cara memisalkan $x = 2,32110111011101 \dots$, lalu mengalikannya dengan 100.000 dan 1.000.000.000 kemudian mengurangkannya sehingga angka dibelakang koma yang sama akan habis dan menghasilkan bentuk $\frac{a}{b}$. Namun demikian, subjek belum dapat mengemukakan alasan mengapa dapat dimisalkan seperti itu, selain itu ada fakta yang lain yang patut diangkat yaitu kesalahan konsep terkait dengan jawaban soal nomor 4 yaitu:

- a. Subjek membagi dua bilangan dengan cara cepat yaitu menghilangkan angka 0 dibelakang suatu bilangan dengan mengatakan bahwa cara yang subjek pakai adalah dengan menggunakan cara eliminasi.
- b. subjek mengatakan bahwa $\frac{0}{0} = 0$.

Namun kesalahan konsep di atas tidak mengubah kebenaran dari jawaban yang dikerjakan subjek. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.4.1.1; S2.4.1.2;

S2.4.1.5; S2.4.1.6; S2.4.1.10; S2.4.1.12; S2.4.1.13; S2.4.1.15; S2.4.1.16; S2.4.1.26; S2.4.1.27; S2.4.1.28; S2.4.1.29; S2.4.1.36; S2.4.1.37; S2.4.1.45; S2.4.1.46; S2.4.1.49 dan S2.4.1.50] atas pertanyaan [P2.4.1.1; P2.4.1.2; P2.4.1.5; P2.4.1.6; P2.4.1.10; P2.4.1.12; P2.4.1.13; P2.4.1.15; P2.4.1.16; P2.4.1.26; P2.4.1.27; P2.4.1.28; P2.4.1.29; P2.4.1.36; P2.4.1.37; P2.4.1.45; P2.4.1.46; P2.4.1.49 dan P2.4.1.50] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 4 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara I nomor 5

- P2.5.1.1 : nomor 5 silahkan nomor 5 yah, apakah Jumlah dua bilangan irrasional adalah irrasional pula. Jika ya, berikan alasan! Jika tidak, berikan contoh!
- S2.5.1.1 : iya kak
- P2.5.1.2 : iya?
- S2.5.1.2 : he em (mengiyakan)
- P2.5.1.3 : mengapa?
- S2.5.1.3 : emmm ... tunggu dulu kak, 2 bilangan irrasional he em ... karna, karna iya kak
- P2.5.1.4 : Jumlah dua bilangan irrasional adalah irrasional?
- S2.5.1.4 : iye, jawabannya iya, alasannya tidak kutau tapi alasanku itu karna kalo misalnya irrasional ditambah irrasional, insya Allah irrasionalmi hasilnya, ituji kak
- P2.5.1.5 : iya?
- S2.5.1.5 : he em
- P2.5.1.6 : coba dikasih contoh?
- S2.5.1.6 : deh malu-maluku kalo salahya he ... he ... (ketawa) misalnya itu $2\sqrt{3}$ kan, tentumi irrasional , irrasional ditambah bilangan irrasional lagi tambah 2 naah kalo ini kan tidak bisami ditambahkan kak, kalo misalnya itu pengakarannya berbeda tidak bolehmi ditambahkan dan kebanyakan kalo irrasional itu memang tidak bisaki itu akarnya mendapatkan bilangan yang bulat

P2.5.1.7 : mendapatkan bilangan bulat?

S2.5.1.7 : iye

P2.5.1.8 : oh, iya tadi saya lupa yah apa yang dimaksud bilangan irrasional dulu tadi?

S2.5.1.8 : bilangan irrasional bilangan yang ketika dibagi, ketika dioperasikan itu bilangan ... irrasional tidak menghasilkan bilangan yang berulang

P2.5.1.9 : tidak menghasilkan bilangan yang berulang?

S2.5.1.9 : iye, dia itu bertolak belakang dari bilangan rasional

P2.5.1.10 : definisinya itu? Definisi bilangan rasional?

S2.5.1.10 : iye, irrasional

P2.5.1.11 : masih ada lagi definisi bilangan irrasional lagi yang ditahu?

S2.5.1.11 : irrasional

P2.5.1.12 : masih ada definisi yang lain?

S2.5.1.12 : bilangan irrasional ... ituji kak, bilangan yang tidak mempunyai pola

P2.5.1.13 : itu saja?

S2.5.1.13 : dan irrasional itu e ... tidak menghasilkan bilangan yang bulat ketika dibagi

P2.5.1.14 : iya, itu?

S2.5.1.14 : he em dan tidak berpola

P2.5.1.15 : contohnya bilangan irrasional?

S2.5.1.15 : $\sqrt{2}$, $\frac{22}{7}$

P2.5.1.16 : apalagi ... ha ... $\frac{22}{7}$ (heran) ... $\frac{22}{7}$? irrasional, masuk irrasional

S2.5.1.16 : he em mmm ... tidak tau de kak, jangan meki, π (phi)

P2.5.1.17 : tadi kan ada bilangan $\sqrt{2}$, apakah juga $\frac{22}{7}$ bilangan irrasional?

S2.5.1.17 : irrasional? Iya

P2.5.1.18 : trus apalagi? π (phi), π juga bilangan irrasional, trus apalagi?

S2.5.1.18 : bilangan logaritma

P2.5.1.19 : logaritma? Iya?

S2.5.1.19 : iya

P2.5.1.20 : apalagi?

S2.5.1.20 : ituji kak, sinus

P2.5.1.21 : sin apa contohnya?

S2.5.1.21 : tidak ada kak. Sin13 berapa itu?

P2.5.1.22 : sin 13, begitu? logaritma di? Masuk logaritma

S2.5.1.22 : janganki kasikan ka soal begitu kak

P2.5.1.23 : jadi kalo saya bilang begini de $\sqrt{16}$

S2.5.1.23 : bisa itu kak

P2.5.1.24 : $\sqrt{2}$ kan bilangan irrasional

S2.5.1.24 : ya

P2.5.1.25 : kalo $\sqrt{16}$?

S2.5.1.25 : bukan

P2.5.1.26 : kenapa bukan $\sqrt{16}$?

S2.5.1.26 : karna dia akan menghasilkan bilangan yang bulat

P2.5.1.27 : bilangan bulat?

S2.5.1.27 : iye

P2.5.1.28 : trus klo $\frac{22}{7}$? Itu bilangan?

S2.5.1.28 : irrasional

P2.5.1.29 : kenapa?

S2.5.1.29 : karna nanti hasilnya kalo $\frac{22}{7}$ itu 22 dibagi dengan 7 pasti tidak berulangki hasilnya, hasilnya banyak

P2.5.1.30: he em, coba ada contoh lain, jumlah 2 bilangan irrasional menghasilkan bilangan irrasional, selain contoh ini ? kan banyak tadi contohnya toh bilangan irrasional, bisakah kasi contoh yang lain?

S2.5.1.30 : apalagi kak di? Kayaknya mencakupmi kak, palingan kasihka contoh yang akar-akarji juga kak, seperti begitu

P2.5.1.31 : tidak bisa pakai log... log kah

S2.5.1.31 : anu kak, terkendala sama logaritma he ... he ...(ketawa)

P2.5.1.32 : oh ya pade, iya coba-coba coba saja dulu

S2.5.1.32 : $\log 2 + \log 3$ hasilnya 6 ... $\log 6$ eh ... nda kutauki $\log 6$ berapa

P2.5.1.33 : iya, beginiji $\log 2 + \log 3 = \log 6$? Ini bilangan apa

S2.5.1.33 : bilangan irrasional

P2.5.1.34 : bilangan irrasional?

S2.5.1.34 : iya kak.

P2.5.1.35 : kita lanjut ke nomor 6, apakah hasil kali, eh tadi alasannya kenapa jumlah 2 bilangan irrasional adalah irrasional

S2.5.1.35 : tadi kak yang kubilangji kak, karna itu sudahmi alasannya tadi kak, kulupai alasanku

P2.5.1.36 : oh ya ... ya alasannya?

S2.5.1.36 : alasannya karna irrasional kak toh, kalo dia dioperasikan dengan penjumlahan kan tidak samaki kak nda bisaki dioperasikan pasti hasilnya irrasional ki, ituji kak alasanku

P2.5.1.37 : di sini kan ujian tulisan yang lalu, (membacakan ujian tulisan subjek) jumlah 2 bilangan irrasional adalah irrasional pula karna bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dibentuk menjadi bilangan rasional dan juga tidak dapat disederhanakan menjadi bilangan bulat, itu juga?

S2.5.1.37 : ya, itu juga barupa teringat

P2.5.1.38 : ha ... ha ... ha aduh kayaknya banyak yang dilupa

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 menjawab pertanyaan dengan salah bahwa jumlah dua bilangan irrasional selalu menghasilkan bilangan irrasional alasannya karena bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dibentuk menjadi bilangan rasional dan juga tidak dapat disederhanakan menjadi bilangan bulat sehingga pasti selalu menghasilkan bilangan irrasional, subjek mampu menjelaskan konsep bilangan irrasional dengan benar namun salah dalam memberikan contoh, contoh bilangan irrasional yang salah adalah $\frac{22}{7}$ alasan subjek hasil dari 22 dibagi dengan 7 menghasilkan desimal yang tidak berulang, subjek terbatas dalam memberikan contoh-contoh bilangan irrasional, subjek mengakui bahwa ia mempunyai kendala tentang logaritma walaupun subjek dapat memberikan contoh logaritma yang benar, namun tidak bisa menjamin dapat memberikan contoh lain mengenai logaritma yang benar. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.5.1.1; S2.5.1.4; S2.5.1.6; S2.5.1.32; S2.5.1.36 dan S2.5.1.37] atas pertanyaan [P2.5.1.1; P2.5.1.4; P2.5.1.6; P2.5.1.32; P2.5.1.36 dan P2.5.1.37] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 5 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga tidak dapat memberi contoh bahwa dengan menjumlahkan bilangan irrasional dengan inversnya pada penjumlahan bisa menghasilkan bilangan rasional yaitu 0. Dengan demikian, Subjek S1 tidak

memahami konsep penjumlahan bilangan irrasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 6

- P2.6.1.1 : ok nomor 6 tadi, apakah hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah irrasional? Jika ya, berikan alasan! Jika tidak, berikan contoh! ...
hasil kali lagi dari dua bilangan irrasional adalah irrasional?
- S2.6.1.1 : (lama berpikir) tidak
- P2.6.1.2 : tidak?
- S2.6.1.2 : iye
- P2.6.1.3 : contohnya?
- S2.6.1.3 : contohnya kak, akar-akar lagi nah $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ kan irrasional ... irrasional
kalo saya kalikan pasti hasilnya adalah 3
- P2.6.1.4 : dari mana hasilnya? Kenapa bisa dapat?
- S2.6.1.4 : $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2$ akar 3 pangkat 2, ya dioperasikan ini $3^{\frac{1}{2}}$ dikali 2 =
3 pangkat 1
- P2.6.1.5 : yah, saya tanya dulu, saya tanya nah kenapa $\sqrt{3}$ pangkat 2 bisa
dibentuk seperti ini (menunjuk $(3^{\frac{1}{2}})^2 = 3^{\frac{1}{2} \times 2} = 3^1 = 3$)
- S2.6.1.5 : akar 3 pangkat 2 kak
- P2.6.1.6 : yah, apa alasannya, dasarnya apa?
- S2.6.1.6 : anu ... itu di kak e ... apalagi ini eksponen di'
- P2.6.1.7 : ya, eksponen?
- S2.6.1.7 : anu itu kak, sifat itu kak, sifatnya eksponen
- P2.6.1.8 : sifat eksponen?
- S2.6.1.8 : iya
- P2.6.1.9 : bisa kasih saya contoh, apa bunyinya itu sifat eksponen?
- S2.6.1.9 : nda kutauki bunyinya kak tapi anumi deh kak $\sqrt{p} \times \sqrt{p} = (\sqrt{p})^2$ itu
kak Insya Allah
- P2.6.1.10 : trus begini kenapa lagi dari $(\sqrt{3})^2$ (akar 3 pangkat 2) = $(\sqrt{3})^2 =$
 $(3^{\frac{1}{2}})^2$ (3 pangkat $\frac{1}{2}$ kali 2)
- S2.6.1.10 : kan kalo $\sqrt{3}$ itu kan = 3 pangkat $\frac{1}{2}$
- P2.6.1.11 : alasannya?
- S2.6.1.11 : di mana di sini? Kan ada di sini ada sifat eksponen juga di mana kalo
di atasnya sini bedeng m (menunjuk) ini akar n maka $a = \frac{m}{n}$
- P2.6.1.12 : seperti itu? Jadi sifat itu sifat eksponen?

- S2.6.1.12 : ya kak, ada pasti sebentar soal begitu? ya sifat eksponen, logaritma dan ...
- P2.6.1.13 : trus ini kan 3 pangkat $\frac{1}{2}$ trus dikali 2, kenapa dikali 2 pangkatnya?
- S2.6.1.13 : kenapa?
- P2.6.1.14 : dikali 2 pangkatnya?
- S2.6.1.14 : kan kalo pangkat dipangkatkan , dikalikan, kalo pangkat dikali dengan pangkat kan dijumlahkan, itu sifat juga kak
- P2.6.1.15 : apa bunyi sifatnya
- S2.6.1.15 : jika e ... jika suatu bilangan berpangkat dipangkatkan, maka pangkat dari suatu bilangan yang dipangkatkan dikalikan
- P2.6.1.16 : dikalikan?
- S2.6.1.16 : maka pangkat dari pangkat bilangan yang berpang ... yang jelasnya begitumi kak maksudku kalo pangkatnya itu berpangkat lagi dikalikan
- P2.6.1.17 : dikalikan?
- S2.6.1.17 : He em
- P2.6.1.18 : jadi itu termasuk apa tadi?
- S2.6.1.18 : sifat eksponen
- P2.6.1.19 : sifat eksponen
- S2.6.1.19 : iye

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 menjawab dengan benar bahwa tidak selalu hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah irrasional dengan bukti counter example yaitu memberikan contoh penyangkal $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2} \times 2} = 3^1 = 3$ dengan menggunakan sifat eksponen. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.6.1.1; S2.6.1.3; S2.6.1.4; S2.6.1.6; S2.6.1.7; S2.6.1.10; S2.6.1.11 dan S2.6.1.14] atas pertanyaan [P2.6.1.1; P2.6.1.3; P2.6.1.4; P2.6.1.6; P2.6.1.7; P2.6.1.10; P2.6.1.11 dan P2.6.1.14] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 6 pada materi jenis-jenis bilangan real di mana subjek memberikan bukti melalui counter example (contoh

penyangkal) sehingga dapat memberi contoh bahwa dengan mengalikan dua bilangan irrasional yang sama berbentuk akar seperti pada contoh di atas bisa menghasilkan bilangan rasional maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.

Transkrip wawancara I nomor 7

- P2.7.1.1 : nomor 7, apakah hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional? Berikan alasan!
- S2.7.1.1 : apakah hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional
- P2.7.1.2 : hasil bagi bilangan rasional?
- S2.7.1.2 : oh rasional ... adalah rasional, iya
- P2.7.1.3 : iya?
- S2.7.1.3 : iye
- P2.7.1.4 : sudah pasti?
- S2.7.1.4 : pasti, pasti
- P2.7.1.5 : mengapa? Mengapa dia bisa dibagi?
- S2.7.1.5 : karna bilangan rasional itu ketika dibagi dengan bilangan rasional juga, kan di sini bilangan rasional itu termasuk bilangan bulat, nah kita ambil contoh dari bilangan bulat, bilangan bulat dibagi dengan bilangan bulat pasti hasilnya rasional
- P2.7.1.6 : ya?
- S2.7.1.6 : ya, gituji kak
- P2.7.1.7 : untuk semua bilangan bulat?
- S2.7.1.7 : untuk semua (ragu-ragu)
- P2.7.1.8 : bilangan bulat?
- S2.7.1.8 : iye Insya Allah

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 menjawab dengan salah bahwa hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional dengan alasan bilangan rasional itu termasuk bilangan bulat, subjek mengambil contoh bilangan bulat, bilangan bulat dibagi dengan bilangan bulat hasilnya pasti rasional berlaku untuk semua pembagian

bilangan rasional. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.7.1.2 dan S2.7.1.5] atas pertanyaan [P2.7.1.2 dan P2.7.1.5] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 7 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga tidak dapat memberi contoh bahwa bisa saja jika penyebutnya 0, 0 bilangan rasional maka hasilnya adalah tak terdefinisi dan syarat untuk mendapatkan bilangan rasional adalah $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep pembagian dua bilangan rasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 8

- P2.8.1.1 : ok nomor 8 e ... Jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, termasuk bilangan apakah hasil kali dari kedua bilangan tersebut?
- S2.8.1.1 : bilangan real
- P2.8.1.2 : hasil kali kedua bilangan tersebut?
- S2.8.1.2 : Insya Allah bilangan real kak, masukki real tapi di situ jawabanku irrasional toh kak apakah ... rasional,
- P2.8.1.3 : ya di sini jika a bilangan rasional b bilangan irrasional maka akan membentuk irrasional, jadi saya tanyaki dulu jelaskanki coba kenapa ... mengapa kalo dikalikan bilangan a dengan b dikalikan akan membentuk bilangan real?
- S2.8.1.3 : real?
- P2.8.1.4 : ya
- S2.8.1.4 : karna bilangan ..., kan di sini e ... bagian dari bilangan real itu sendiri adalah perr ... penggabungan antara bilangan rasional dan juga irrasional, kalo misalnya mereka berdua digabung otomatis jadiki bilangan real karena bilangan real itu sudah memuatmi bilangan rasional dan irrasional

- P2.8.1.5 : Jadi saya bisa bilang begini, kalo dua bilangan a dgn b dikali, dia bisa bilangan rasional sekaligus bilangan irrasional kan masuk bilangan real begitu?
- S2.8.1.5 : Tidak
- P2.8.1.6 : Tidak?
- S2.8.1.6 : Iya padengka kuambilmi satu padeng, ketika bilangan irrasional dikalikan dengan rasional insya Allah hasilnya rasionalki kak
- P2.8.1.7 : Nda nda a rasional b irrasional jika a dikali b ?
- S2.8.1.7 : jika a dikali b maka hasilnya irrasional
- P2.8.1.8 : irrasional? kenapa?
- S2.8.1.8 : karna menurutku kak lebih kuatki di sini pengaruh dari irrasional itu sendiri
- P2.8.1.9 : lebih kuatki?
- S2.8.1.9 : he em lebih kuatki kalo bilangan rasional artinya kayak memang sih mempunyai batasan tersendiri rasional dengan irrasional tapi karna irrasional itu kayak besarki kurasa dampaknya terhadap bilangan lain jadi misalnya kalo bilangan bulat dikalikan dengan bilangan bilangan irrasional otomatis hasilnya irrasional dan juga bilangan rasional itu miripji dengan bilangan bulat dan otomatis ketika a dikali dengan b hasilnya irrasional, itumo kak

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 menjawab dengan salah jawaban soal yang berbunyi jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, maka hasil kali dari kedua bilangan tersebut adalah bilangan real dengan alasan kalau misalnya kedua bilangan tersebut dikalikan otomatis menjadi bilangan real karena bilangan real itu sudah memuat bilangan rasional dan irrasional, kemudian jawaban tersebut berubah lagi bahwa hasil kali dari kedua bilangan irrasional alasannya karena menurut subjek lebih kuat pengaruh dari bilangan irrasional dibandingkan bilangan rasional dengan penjabaran alasan yang tidak jelas. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.8.1.1; S2.8.1.2;

S2.8.1.4; S2.8.1.7; S2.8.1.8 dan S2.8.1.9] atas pertanyaan [P2.8.1.1; P2.8.1.2; P2.8.1.4; P2.8.1.7; P2.8.1.8 dan P2.8.1.9] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 8 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Transkrip wawancara I nomor 9

- P2.9.1.1 : ok nomor 9, Apakah $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$. Berikan alasan?
S2.9.1.1 : sama
P2.9.1.2 : $\forall a \in \mathbb{R}$?
S2.9.1.2 : iye untuk setiap
P2.9.1.3 : coba berikan alasannya? Ya coba ... coba ditulis di sini apakah $\sqrt{a^2} = a$?
S2.9.1.3 : iye, sama
P2.9.1.4 : $\forall a \in \mathbb{R}$?
S2.9.1.4 : ya, karna $\sqrt{a^2}$ itu kita bertolak lagi pada sifat eksponen yang akar a^2 itu kita bertolak lagi pada sifat eksponen yang akar a pangkat m , dimana akarnya itu $n =$ sembarang nilai di sini ka dimana m -nya itu bilangan bulat dan n -nya juga bilangan bulat, maka dia akan berlaku a pangkat m per n dan kalo kita kembali lagi pada akar a pangkat 2 dimana 2 ini $= m$ dan pengakarannya itu adalah 2 kan akar pangkat 2 jadi a -nya yang diakarnya itu adalah n , nah kita sesuaikanmi dengan sifatnya a^2 per 2 $= 2/2$, $2/2$ itu kan 1, jadi a pangkat 1, a pangkat 1 itu sama dengan a .
P2.9.1.5 : tidak ada jawaban lain? Itu saja?
S2.9.1.5 : tidak adami kak, itumi

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 menjawab dengan salah bahwa $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$ didapatkan dengan menggunakan sifat eksponen yaitu mengubah bentuk akar ke bentuk pangkat kemudian mengalikan pangkat dengan pangkat, namun hasil tersebut mestinya $\sqrt{a^2} = a$, untuk $a > 0$, dan $\sqrt{a^2} = -a$ untuk $a < 0$ karena akar dari suatu

bilangan positif haruslah positif. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.9.1.1 dan S2.9.1.4] atas pertanyaan [P2.9.1.1 dan P2.9.1.4] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 9 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami bahwa $\sqrt{a^2}$ adalah nilai mutlak dari $|a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$, melalui suatu pembuktian dengan menggunakan definisi nilai mutlak. Dengan demikian, Subjek S1 tidak memahami pembuktian dengan menggunakan definisi nilai mutlak, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 10

- P2.10.1.1 : ok ... e ... nomor 10 Untuk bilangan real a yang mana saja, nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$)?
- S2.10.1.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit) tidak lebih besar?
- P2.10.1.2 : he em (mengiyakan)
- S2.10.1.2 : kak ini ...
- P2.10.1.3 : Jadi bilangan yang mana saja itu?
- S2.10.1.3 : bilangan real yang lebih besar dari 2 ... e ... atau sama dengan 2
- P2.10.1.4 : jadi a itu?
- S2.10.1.4 : a itu adalah bilangan yang lebih besar atau = 2
- P2.10.1.5 : kan saya bilang kalo bilangan real kan apakah masuk bilangan pecahan juga?
- S2.10.1.5 : masukki kak yang jelasnya itu di mana hasilnya lebih besar dari 2 dan iya lebih besar atau = 2
- P2.10.1.6 : lebih besar atau sama dengan 2?
- S2.10.1.6 : iye, bilangan apapun itu

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 menjawab dengan benar namun belum lengkap bahwa nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$) adalah $a \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}$,

dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai a satu persatu ke dalam pertidaksamaan di atas. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.10.1.4; S2.10.1.5 dan S2.10.1.6] atas pertanyaan [P2.10.1.4; P2.10.1.5 dan P2.10.1.6] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 10 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Transkrip wawancara I nomor 11

- P2.11.1.1 : ok nomor 11, apakah kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu?
S2.11.1.1 : apakah kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu tadi, iya selalu
P2.11.1.2 : selalu lebih besar?
S2.11.1.2 : selalu, iye Insya Allah selalu
P2.11.1.3 : alasannya?
S2.11.1.3 : emmm... iya selalu kak, selalu ... selalu karna
P2.11.1.4 : untuk semua bilangan real yah
S2.11.1.4 : iya, untuk semua bilangan real yang lebih ... iya cocokmi kak, untuk semua bilangan real ... bilangan real ... bilangan real ... tunggu dulu (mengerjakan) kuadratnyaji toh kak (sambil mengerjakan dan berpikir)
P2.11.1.5 : iya, akan selalu lebih besar dari pada bilangan real itu?
S2.11.1.5 : akan selalu
P2.11.1.6 : selalu?
S2.11.1.6 : iye selalu meskipun itu bilangan negatif
P2.11.1.7 : pas, begitu saja?
S2.11.1.7 : iye.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 menjawab dengan salah bahwa kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu tanpa dapat

menjelaskan alasannya, subjek hanya memberikan satu contoh dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua bilangan real. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.11.1.1; S2.11.1.5 dan S2.11.1.6] atas pertanyaan [P2.11.1.1; P2.11.1.5 dan P2.11.1.6] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 11 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bagaimana mencari himpunan penyelesaian dan mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku dengan menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal ke dalam bentuk pertidaksamaan. Dengan demikian, subjek S2 tidak memahami konsep kuadrat dari bilangan real, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 12

- P2.12.1.1 : nomor 12, apakah akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu?
S2.12.1.1 : apakah akar ...
P2.12.1.2 : dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu?
S2.12.1.2 : akarnya?
P2.12.1.3 : ya, apakah selalu lebih kecil?
S2.12.1.3 : akan selalu... iye selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu sendiri... selalu
P2.12.1.4 : contohnya?
S2.12.1.4 : contohnya itu akar 9
P2.12.1.5 : he em
S2.12.1.5 : akar 9 itu ... kan 3
P2.12.1.6 : he em
S2.12.1.6 : dan bilangan itu sendiri kan 9, iya
P2.12.1.7 : untuk setiap bilangan real?

S2.12.1.7 : untuk setiap bilangan real positif
P2.12.1.8 : positif, iya?
S2.12.1.8 : iye
P2.12.1.9 : sudah jawabannya, yakin?
S2.12.1.9 : *deal or no deal* ini kak ...
P2.12.1.10 : *deal or no deal* ha ... ha

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 tidak mampu menjawab dengan benar bahwa akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu dengan hanya memberikan satu contoh dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua bilangan real. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.12.1.3; S2.12.1.4; S2.12.1.5 dan S2.12.1.7] atas pertanyaan [P2.12.1.3; P2.12.1.4; P2.12.1.5 dan S2.12.1.7] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 12 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bagaimana mencari himpunan penyelesaian dan mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku dengan menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal ke dalam bentuk pertidaksamaan. Dengan demikian, subjek S2 tidak memahami konsep akar dari bilangan real, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Aljabar pada Bilangan Real.**

Transkrip wawancara 2 nomor 13

- P2.13.2.1 : ya, kita mulai ini adalah wawancara ketiga, soalnya adalah Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $-(a + b) = (-a) + (-b)$. Buktikan!
- S2.13.2.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit) sudahmi kak
- P2.13.2.2 : ha ... (heran) tidak ada langkah-langkahnya ... yang lain
- S2.13.2.2 : langsungmi didapat kak
- P2.13.2.3 : hi ... hi ... (ketawa) yang saya tanyakan ok, jadi anda ... ini kan soal lagi ditulis kan?
- S2.13.2.3 : he em (mengiyakan tapi kan terbuktimi kak toh yang jelasnya itu sifat yang dipakai adalah sifat distributif perkalian
- P2.13.2.4 : oh, anda menggunakan sifat distributif pada perkalian?
- S2.13.2.4 : iya, maunya pake apa ka kak?
- P2.13.2.5 : ndaji, maksud saya langsung ... saya heran juga karna ...
- S2.13.2.5 : eh ... soalnya kan memang bisaji kak distributif perkalian
- P2.13.2.6 : ok ...ok, di sini yah pada ujian tulisannya dibilang di sini berdasarkan ... teorema $(-1)a = -a$, a dimisalkan $(a + b)$, jadi ...
- S2.13.2.6 : bisa juga
- P2.13.2.7 : $(-1)a = ...$ karna tadi a yah yang dimisalkan jadi $-1(a + b) = (-a) + (-b)$ sifat distributif jadi yang mana yang benar ini? (membacakan hasil pekerjaan subjek pada ujian tulisan yang lalu)
- S2.13.2.7 : benarki itu juga itu kak, ini juga benarki
- P2.13.2.8 : ini juga yang benar, iya?
- S2.13.2.8 : benar juga ini, itu lebih benar lagi
- P2.13.2.9 : oh lebih benar?
- S2.13.2.9 : kalo ini toh kak, kan bisaji juga tapi kalo terlalu singkatki, memang iya terlalu singkatki kak, tapi bisaji juga dan kalo misalnya sesuai dengan yang tadi, sesuai dengan teorema memang bisaji kak a -nya itu dimisalkan $(a + b)$ kemudian $-1(a + b) = ...$ sesuai dengan sifat distributif $(-a) + (-b)$ samaji kak, cuman beda 1 langkah, kalo ini nda kutau teorema keberapa yang jelasnya ini merupakan teorema, tapi nda tauka teorema keberapa itu $-1(a)$ hasilnya itu = $(-a)$.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 menjawab pertanyaan pembuktian dengan langsung saja mengalikan -1 dengan $(a + b)$ menjadi $(-a) + (-b)$, ini bukanlah pembuktian dari soal tersebut tetapi

subjek mengerjakannya dengan menggunakan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan walaupun subjek meralatnya setelah mendengarkan pewawancara membacakan ujian tulisan yang telah dikerjakan oleh subjek sebelumnya yaitu dengan menggunakan teorema $-1(a) = (-a)$ dengan memisalkan $a = a + b$, ini juga merupakan penyimbolan yang kurang tepat karena a yang diruas kiri berbeda dengan a yang diruas kanan. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.13.2.2; S2.13.2.3; S2.13.2.6; S2.13.2.7 dan S2.13.2.9] atas pertanyaan [P2.13.2.2; P2.13.2.3; P2.13.2.6; P2.13.2.7; P2.13.2.9] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 13 pada materi sifat aljabar pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami pembuktian secara matematis berdasarkan pada aksioma, definisi, sifat atau teorema yang berkaitan dengan soal. Dengan demikian subjek S2 tidak memahami konsep pembuktian secara matematis terkait dengan sifat aljabar pada bilangan real, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara 2 nomor 14

P2.14.2.1 : kita lanjut ke nomor 2. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan berikut melalui langkah-langkah yang disertai alasan, mengapa langkah itu ditempuh (alasan dapat berupa aksioma, sifat, definisi atau teorema yang sesuai)!

S2.14.2.1 : (menulis soalnya kembali) iya kak

P2.14.2.2 : soalnya adalah $3\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 4\left(3x - \frac{1}{2}\right)$

S2.14.2.2 : (menulis soalnya kembali) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)$?

P2.14.2.3 : coba dikerjakan, setiap langkah disertai alasan

S2.14.2.3 : (subjek mengerjakan soal beberapa menit)

P2.14.2.4 : tolong alasannya ditulis di' baru dijelaskan

S2.14.2.4 : (mengerjakan)

P2.14.2.5 : ya, coba bisa dijelaskan

- S2.14.2.5 : ok, jadi diketahui soalnya $3\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 4\left(3x - \frac{1}{2}\right)$, nah di sini yang pertama yang ingin saya lakukan adalah memberikan distributif perkalian yang akan menghasilkan $6x + 1 = 12x - 2$, kemudian setelah itu saya operasikan pada sifat penjumlahan yang dimana dikalikan ... dijumlahkan dengan ... e ... bilangan yang sama pada kedua ruasnya yaitu -1 , $6x + 1 + (-1) = 12x - 2 + (-1)$, nah kemudian akan menghasilkan $6x + 0 = 12x - 3$, di sini merupakan sifat identitas pada penjumlahan karna $6x + 0$, selanjutnya $6x = 12x - 3$, di sini juga saya akan memberikan sifat penjumlahan... operasi sifat pada penjumlahan yaitu menjumlahkan kedua ruas dengan $-12x$, jadi $6x + (-12x) = 12x + (-12x) - 3$ yang akan menghasilkan $-6x = -3$, setelah itu karna terlihat pada variabel x ada -6 , saya ingin menjadikannya sebagai x saja $1x$ setelah itu saya kalikan dengan invers perkalian dari -6 , jadi invers dari -6 itu adalah $-\frac{1}{6}$, jadi $-6x \cdot -\frac{1}{6} = -3 \cdot -\frac{1}{6}$, yang dimana tadi kedua ruas dikalikan dengan inversnya yang akan menghasilkan $x = \frac{1}{2}$, jadi x yang memenuhi adalah $\frac{1}{2}$
- P2.14.2.6 : ini yah, yang saya mau tanya tadi di sini $6x + 1$, ini tadi sifat apa di sini?
- S2.14.2.6 : distributif perkalian
- P2.14.2.7 : kemudian tambah 1, kemudian tambahkan -1?
- S2.14.2.7 : iye, operasi sifat penjumlahan atau sifat operasi penjumlahan
- P2.14.2.8 : ok, trus yang mana yang benar operasi sifat penjumlahan ?
- S2.14.2.8 : sifat operasi penjumlahan eh operasi sifat penjumlahan ... ya ... operasi sifat penjumlahan
- P2.14.2.9 : trus yang satunya lagi
- S2.14.2.9 : trus setelahnya itu ada identitas pada penjumlahan
- P2.14.2.10 : yang mana identitas pada penjumlahan?
- S2.14.2.10 : $6x + 0$, kan tadi $1 + (-1)$ menghasilkan 0, nah itulah identitas pada penjumlahan
- P2.14.2.11 : trus lanjut, ini lanjut
- S2.14.2.11 : sama ... $6x + (-12x)$ disitu juga terdapat operasi sifat pada penjumlahan, iya kemudian setelah itu ada invers pada perkalian
- P2.14.2.12 : invers pada perkalian?
- S2.14.2.12 : iye
- P2.14.2.13 : itu tadi dari sini, kenapa langsung $12x + (-12x) - 3$... langsung kurang 3, langsung negatif 3
- S2.14.2.13 : kan di sini ada 0, kan sebelumnya ada $0 + (-3)$
- P2.14.2.14 : oh ya ... ya kenapa dapat ... alasannya?
- S2.14.2.14 : jadi 0-nya itu didapatkan dari $12x + (-12x)$ itu adalah identitas pada penjumlahan
- P2.14.2.15 : ok terus

- S2.14.2.15 : selanjutnya karna terdapat $-6x = -3$, kan di sini kita ... kita akan memperoleh $x = \dots$ terus
- P2.14.2.16 : dari sini tadi
- S2.14.2.16 : nah setelah identitas pada penjumlahan kemudian saya pakai identitas pada perkalian untuk menghabiskan ini (menunjuk)?
- P2.14.2.17 : yang mana identitas pada perkalian? ini ? $\frac{1}{6}$?
- S2.14.2.17 : ini kan $a \times \frac{1}{a} = 1$ dan ini (menunjuk 1) adalah identitas perkalian yang ini 1, 1 itu identitas perkalian , kalo ingin menghasilkan 1, jadi $a \times \frac{1}{a} = 1$ begitu.
- P2.14.2.18 : ya ... ya terus ini $-\frac{1}{6}$ masing-masing $-\frac{1}{6}$, eh kalo ini dulu 0 tambah berapa ini?
- S2.14.2.18 : -3
- P2.14.2.19 : apa itu?
- S2.14.2.19 : identitas penjumlahan
- P2.14.2.20 : identitas penjumlahan?
- S2.14.2.20 : iye
- P2.14.2.21 : ok lanjut ke sini $-6x \dots$?
- S2.14.2.21 : dikali $-\frac{1}{6}$ di sini kita akan menghasilkan identitas perkalian ... identitas perkalian itu adalah 1
- P2.14.2.22 : alasannya menggunakan kali $-\frac{1}{6}$?
- S2.14.2.22 : untuk menghasilkan sifat operasi pada perkalian
- P2.14.2.23 : kedua ruas dikalikan dengan ... kemudian ... e ... ini kan x , kenapa langsung menjadi x ?
- S2.14.2.23 : mmm kan di sini kita berpatokan pada teorema a dikali ... , eh aksioma yah aksioma lapangan ... $a \times \frac{1}{a} = 1$, nah kan kalo -6 kan sebenarnya ini bisa ditukarkan atau dikomutatifkanki dulu $-6 \times -\frac{1}{6} \times x$ kan kayak begitu?
- P2.14.2.24 : komutatif?
- S2.14.2.24 : iye komutatif
- P2.14.2.25 : yah trus
- S2.14.2.25 : trus, setelah itu kan didapatkan $-6 \times x$
- P2.14.2.26 : komutatif saja?
- S2.14.2.26 : iya, komutatif pada perkalian
- P2.14.2.27 : trus
- S2.14.2.27 : setelah itu dapatmi, dapatmi $-6 \times -\frac{1}{6}$ itu 1, jadi $1x \dots 1 \times a = a$, kalo kita misalkan a ini $= x$, maka $1 \times x = x$
- P2.14.2.28 : itu sifat apa?
- S2.14.2.28 : sifat identitas juga pada perkalian

P2.14.2.29 : trus ... trus yang saya mau tanyakan di sini ada perbedaan yah, anda menggunakan sifat apa tadi itu $a \times \frac{1}{a}$ toh?

S2.14.2.29 : iya

P2.14.2.30 : iya $a \times \frac{1}{a}$, sedangkan di sini menggunakan $-1 \times -1 = 1$

S2.14.2.30 : anu ini kak $-1 \times -1 = 1$, maksudnya kalo negatif dikalikan dengan negatif maka hasilnya itu positif cuman bertolak kesitu bukan hasilnya

P2.14.2.31 : apa ini ... apa ini?

S2.14.2.31 : negatif

P2.14.2.32 : maksud saya apa namanya?

S2.14.2.32 : anu itu kak teorema

P2.14.2.33 : teorema?

S2.14.2.33 : iye

P2.14.2.34 : mau menunjukkan kemana ini? ini

S2.14.2.34 : minus dengan minus nya

P2.14.2.35 : oh $-5 \times \dots$ ini yah, kalo ini?

S2.14.2.35 : $-3 \times -\frac{1}{6}$

P2.14.2.36 : $-\frac{1}{6}$?

S2.14.2.36 : iye, penunjukannya kesitu untuk minusnya ji saja

P2.14.2.37 : oh jadi kalo misalnya anda bilang hasilnya $\frac{1}{2}$ karena dari sini? -1×-1 menghasilkan 1?

S2.14.2.37 : menghasilkan positif

P2.14.2.38 : positif?

S2.14.2.38 : he ... untuk tandanya ji kak

P2.14.2.39 : oh begitu yah, kenapa di sini $-3 \times -\frac{1}{6}$ kan mestinya $\frac{3}{6}$?

S2.14.2.39 : iya

P2.14.2.40 : kenapa di sini?

S2.14.2.40 : saya sederhanakan memangmi kak

P2.14.2.41 : oh sederhanakan. Bagaimana caranya menyederhanakan?

S2.14.2.41 : kan ini negatif kan, dapat $\frac{3}{6}$, nah kalo kita mau menyederhanakan masing-masing dibagi dengan 2 eh dibagi dengan 3

P2.14.2.42 : apa yang masing-masing dibagi dengan 3?

S2.14.2.42 : $\frac{3}{6}$ dibagi dengan 3 untuk menyederhanakan

P2.14.2.43 : $\frac{3}{6}$ dibagi dengan 3?

S2.14.2.43 : iye $\frac{3}{6}$ dibagi dengan 3, : $\frac{3}{6}$ dibagi 3 dapat 1, 6 dibagi 3 dapat 2

P2.14.2.44 : oh maksudnya 3:3 dapat 1

S2.14.2.44 : 6 : 3 dapat 2, jadi $x = \frac{1}{2}$ atau perbandingannya ini kak

P2.14.2.45 : ya ... ya sudah cukup

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 menjawab dengan benar namun ada langkah-langkah yang terlewati (tidak sistematis) dan alasannya yang tidak tepat. Adapun langkah-langkah yang tidak sistematis dan alasan yang tidak tepat adalah:

- Pada langkah dimana $(6x + 1) + (-1) = (12x - 2) + (-1)$ subjek menggunakan penamaan yang salah yaitu operasi sifat pada penjumlahan.
- tidak menggunakan sifat asosiatif pada penjumlahan, yaitu $6x + ((-1) + 1) = 12x + (-2 + (-1))$
- mengatakan bahwa $(-1) + 1 = 0$, $12x + (-12x) = 0$ adalah sifat identitas pada penjumlahan.
- tidak menggunakan sifat asosiatif pada perkalian $-\frac{1}{6}(-6x) = -\frac{1}{6}(-3)$ menjadi $(-\frac{1}{6} \times -6)x = -\frac{1}{6}(-3)$ tapi menggunakan sifat komutatif pada perkalian $-6 \times -\frac{1}{6} \times x$
- pada ujian tulisan yang lalu menggunakan teorema $-1 \times -1 = 1$ dengan mengatakan bahwa adanya aturan perkalian tanda yaitu negatif kali negatif hasilnya positif.

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.14.2.5; S2.14.2.6; S2.14.2.7; S2.14.2.8; S2.14.2.9; S2.14.2.10; S2.14.2.11; S2.14.2.14; S2.14.2.15; S2.14.2.17; S2.14.2.18; S2.14.2.19; S2.14.2.21; S2.14.2.23; S2.14.2.25; S2.14.2.26; S2.14.2.27; S2.14.2.28; S2.14.2.30; S2.14.2.32; S2.14.2.39; S2.14.2.40 dan S2.14.2.43] atas

pertanyaan [P2.14.2.5; P2.14.2.6; P2.14.2.7; P2.14.2.8; P2.14.2.9; P2.14.2.10; P2.14.2.11; P2.14.2.14; P2.14.2.15; P2.14.2.17; P2.14.2.18; P2.14.2.19; P2.14.2.21; P2.14.2.23; P2.14.2.25; P2.14.2.26; P2.14.2.27; P2.14.2.28; P2.14.2.30; P2.14.2.32; P2.14.2.39; P2.14.2.40 dan P2.14.2.43] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 14 pada materi sifat aljabar pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

- **Pemahaman terhadap Materi Pembuktian Bilangan Rasional**

Transkrip wawancara 3 nomor 15

P2.15.3.1 : Ini adalah wawancara kedua dengan materi $e \dots$ bilangan rasional, jadi soalnya adalah buktikan bahwa $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional?

S2.15.3.1 : $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional, (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit)

P2.15.3.2 : Ini tadi coba dijelaskan dari awal

S2.15.3.2 : jadi yang mau dibuktikan di sini apakah $\sqrt{21}$ itu bukan bilangan rasional, jadi di sini saya mengambil t sebagai pemisalan bilangan rasional $t = \sqrt{21}$ dan kemudian Saya

P2.15.3.3 : Kenapa misalkan? Memisalkan t bilangan rasional?

S2.15.3.3 : Karena untuk memudahkan dalam pembuktian supaya

P2.15.3.4 : kenapa Anda ... Tunggu yah saya potong, kenapa Anda memisalkan? Kan pemisalan, misalkan ... sedangkan yang mau dibuktikan bukan bilangan rasional, kenapa Anda memisalkan bahwa dia bilangan rasional?

S2.15.3.4 : teringatja dulu kalo misalnya untuk membuktikan ambilki pembuktian yang lawannya?

P2.15.3.5 : lawannya?

S2.15.3.5 : lawannya .. iya, jadi itumi kuambil kalo misalnya dibuktikan apakah dia bukan artinya ambilki yang iyanya...

P2.15.3.6 : oh begitu, tapi kalo ... jadi semua yang misalnya ada suatu pembuktian

S2.15.3.6 : tidak semua

P2.15.3.7 : jadi yang bagaimana saya harus ... Anda tadi bilang saya kalo membuktikan lawannya?

S2.15.3.7 : yang menyatakan ... e ... bukan dirinya

P2.15.3.8 : ha ... maksudnya? Coba berikan saya contoh pale yang bisa dengan cara pengandaian eh ... dengan cara memisalkan saja

S2.15.3.8 : janganmi dikasih contoh ... yang memisalkan tadi juga dari soalnya andaikan toh kak ... nda adaji andaikan soalnya?

P2.15.3.9 : apanya?

S2.15.3.9 : andaikan

P2.15.3.10 : kenapa?

S2.15.3.10 : andaikan $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional, buktikan!

P2.15.3.11 : ya, maksud saya begini ... nda ... soalnya tadi, buktikan bahwa $\sqrt{21}$ adalah bukan bilangan rasional, kan tadi Anda bilang pembuktian itu biasanya saya lawannya saya ambil toh?

S2.15.3.11 : iya

P2.15.3.12 : coba berikan satu contoh pale selain dari bilangan rasional? Bahwa bisa dengan cara ... anu ... e ... apa bisa dengan ... e ... lawannya Anda bilang tadi?

S2.15.3.12 : nda tau ka.

P2.15.3.13 : kenapa pale Anda langsung mengambil seperti ini? Memisalkannya?

S2.15.3.13 : karena dari pelajaran-pelajaran yang laluji kak

P2.15.3.14 : pelajaran yang lalu?

S2.15.3.14 : he em (mengiyakan) yang masih teringatki diotakku

P2.15.3.15 : oh, yang waktu kapan? Waktu kuliah?

S2.15.3.15 : iya kak.

P2.15.3.16 : trus lanjut

S2.15.3.16 : ituji kak, jadi kalo ditanyaka alasannya nda kutauki

P2.15.3.17 : nda tau yah?

S2.15.3.17 : iye

P2.15.3.18 : trus

S2.15.3.18 : nah, selanjutnya ... e ... $\frac{a^2}{b^2}$ dimasukkanmi kak ke dalam rumus itunya ... apa itu lagi?

P2.15.3.19 : kan tadi $t = \sqrt{21}$, kenapa dipangkatduakan?

S2.15.3.19 : dipangkatduakan, kenapa dipangkatduakan itu di? ... e ... yang jelasnya disitu toh kak, kenapa dipangkatduakan kalo tidak salah untuk mendapatkan angka bulat

P2.15.3.20 : bulat? maksudnya?

S2.15.3.20 : supaya bisaki dicari faktornya

P2.15.3.21 : apa itu angka bulat?

S2.15.3.21 : bulatki kak, tidak bisa dibagi-bagi

P2.15.3.22 : maksudnya apa itu angka bulat?

S2.15.3.22 : bilangan bulat kak.

P2.15.3.23 : oh, bilangan bulat

S2.15.3.23 : iya kak

P2.15.3.24 : diperjelas yah

S2.15.3.24 : bukan angka bulat, iye

P2.15.3.25 : trus, yang saya tanyakan lagi kenapa ini $\frac{a}{b}$? (menunjuk jawaban subjek)

S2.15.3.25 : $\frac{a}{b}$ itu kan di sini kan ... e ... yang mau dicari apakah dia rasional atau tidak dan bentuknya itu bilangan rasional adalah $\frac{a}{b} \dots \frac{a}{b}$, dimana b -nya itu tidak boleh atau tidak sama dengan 0.

P2.15.3.26 : tolong ditulis, kalo ada sesuatu, dituliski, supaya tidak menimbulkan pertanyaan

S2.15.3.26 : (subjek menulis tambahan jawabannya).

P2.15.3.27 : sampai sini? (menunjuk yang baru ditulis subjek yaitu $\frac{a}{b}$, dimana b itu tidak boleh atau tidak sama dengan 0)

S2.15.3.27 : sampai ... situmi kak

P2.15.3.28 : trus kemudian $t^2 = \dots$ tadi alasannya ndak tau dipangkatduakan, supaya dia bulat?

S2.15.3.28 : he em (mengiyakan) supaya dia bulat, supaya bisaki dicari faktornya

P2.15.3.29 : oh supaya bisa dicari faktornya? Ok kemudian dapat kan $21 = \frac{a^2}{b^2} \dots a$ ini kembali saya tanyakan, dari sini ke sini bagaimana caranya? Bagaimana caranya Kenapa dari sini langsung seperti ini?

S2.15.3.29 : itu, sebenarnya kalo mauki dicari, dicarakan aljabar, ini toh, kalo bahasanya anak SD nabilang dikali silangi, tapi kalo bahasanya anak kuliah jangan dikali silang

P2.15.3.30 : hi ...hi ..(ketawa) diapakan?

S2.15.3.30 : di ... kedua ruas dikalikan dengan b^2

P2.15.3.31 : ok tulis disitu

S2.15.3.31 : dikalikan dengan b^2 menjadi $21b^2 = a^2$ ok setelah itu ...

P2.15.3.32 : eh coba dijalankan , coba dijalankan saya mau lihat!

S2.15.3.32 : (menulis)

P2.15.3.33 : kenapa bisa ini dicoret?

S2.15.3.33 : saling mematikan

P2.15.3.34 : apa namanya?

S2.15.3.34 : emmm (berpikir) o dende ... ada ... ada namanya ... ada namanya ... apa namanya lagi ... matimi ada ... ada namanya

P2.15.3.35 : coba diingat-ingat kembali.

S2.15.3.35 : nda, nda bisa kuingat, ada namanya ... apa di ... clearing ... bukan di na ...na ... apa ... sering sekali disebut

P2.15.3.36 : iya?

S2.15.3.36 : iya kak.

P2.15.3.37 : sering didapat di mana?

S2.15.3.37 : dipelajarannya anu ... struktur aljabar

P2.15.3.38 : oh struktur aljabar, oh iya saya tauji maksudmu

S2.15.3.38 : apa kak ... apa kak? He ... he ... tidak bisaka mengingat ...

P2.15.3.39 : coba diingat ingat karna tidak mungkin saya menjawab karna Anda sekarang diwawancarai ok?

S2.15.3.39 : apa di' ... anu mungkin ... apa itu bahasa inggriski, ada anu kak *phone a friend* atau *ask the audience*?

P2.15.3.40 : ha ... ha ... ini bukan anu yah bukan *deal or no deal* , ndak ada di sini.

S2.15.3.40 : apa yah?

P2.15.3.41 : (setelah beberapa lama) bilang saja dilupa yah, alasannya ini dilupa

S2.15.3.41 : ya ... dicoret kak, sistem coret, bahasa anak SMA

P2.15.3.42 : kalo anak kuliah pale

S2.15.3.42 : itumi kak kulupai kak

P2.15.3.43 : apa tidak adakah cara yang lain? Atau tidak adakah istilah yang lain?

S2.15.3.43 : emmm ... ituji kak istilahnya, anu identitas pada perkalian.

P2.15.3.44 : identitas pada perkalian?

S2.15.3.44 : bukan, operasi sifat pada perkalian

P2.15.3.45 : yang bagaimana itu?

S2.15.3.45 : apa itu? Kulupai kak

P2.15.3.46 : yang mana itu operasi sifat pada perkalian, yang mana? Yang mana? Kasi liatka operasi sifat pada perkalian

S2.15.3.46 : anu ... ini kak, invers pada perkalian

P2.15.3.47 : invers pada perkalian, yang mana itu Anda bilang invers pada perkalian?

S2.15.3.47 : yang ini kak (menunjuk), yang invers pada perkalian itu, $\frac{1}{a} \times a = 1$

P2.15.3.48 : ok, kalo ini mau dijadikan invers perkalian

S2.15.3.48 : e ... ini kan bisa saya tuliskan $a^2 \times \frac{1}{b^2} \times b^2$, kalo saya dalam kurungan $\frac{1}{b^2} \times b^2$ maka akan menghasilkan 1

P2.15.3.49 : kenapa bisa $\frac{a^2}{b^2}$ ke ... bisa menjadi $a^2 \times \frac{1}{b^2}$? Dasarnya apa?

S2.15.3.49 : apa? Kulupai kak

P2.15.3.50 : dari sini ke sini (menunjuk) a^2 Anda pisah toh

S2.15.3.50 : iya kak pisah

P2.15.3.51 : dari mana itu? Kenapa bisa seperti itu?

S2.15.3.51 : begituji kak, iya begituji kak

P2.15.3.52 : ok, stop sampai situ yah, jadi $21b^2 = a^2$, kemudian di sini apa ini? (menunjuk)

S2.15.3.52 : a adalah faktor persekutuan

P2.15.3.53 : faktor persekutuan? Apa ini 1, 3, 7, 21? (sambil menunjuk jawaban subjek)

S2.15.3.53 : 1, 3, 7, 21?

P2.15.3.54 : apa maksudnya ini 1, 3, 7, 21?

S2.15.3.54 : ini adalah faktor persekutuan dari 21

P2.15.3.55 : oh ... 1, 3, 7, 21 adalah faktor persekutuan?

S2.15.3.55 : iye.

P2.15.3.56 : Pada ujian tulisannya saya nyatakan bahwa a adalah faktor kelipatan dari 1, 3, 7, tidak ada 21-nya, yang mana itu yang benar?

S2.15.3.56 : oh iye faktor kelipatan padeng kak ku lupa, a adalah faktor kelipatan dari 21 yaitu 1, 3, dan 7

P2.15.3.57 : faktor kelipatan

S2.15.3.57 : iye

P2.15.3.58 : apa maksudnya faktor kelipatan?

S2.15.3.58 : artinya 21 mempunyai kelipatan 1, 3, 7.

P2.15.3.59 : oh 21 mempunyai kelipatan 1, 3 dan 7. apakah bedanya faktor dengan kelipatan?

S2.15.3.59 : saamaji .faktor persekutuan

P2.15.3.60 : kan Anda tadi bilang faktor persekutuan?

S2.15.3.60 : iya

P2.15.3.61 : toh, apa bedanya faktor persekutuan dengan faktor kelipatan?

S2.15.3.61 : samaji kak

P2.15.3.62 : kok dihapus?

S2.15.3.62 : tidak kuhapiski kak

P2.15.3.63 : berarti samaji ini?

S2.15.3.63 : he em (mengiyakan) samaji atau ... atau ini kak

P2.15.3.64 : faktor persekutuan dengan faktor kelipatan?

S2.15.3.64 : iye samaji kak

P2.15.3.65 : apa pale bedanya itu? Apa artinya itu faktor persekutuan atau faktor kelipatan?

S2.15.3.65 : faktor persekutuan he ... he ... artinya kalo misalnya kelipatan, kelipatan dari 1, 3 dan 7 itu biasa menghasilkan 21 dan kalo persekutuan dari 21 itu menghasilkan 1, 3, dan 7

P2.15.3.66 : begitu?

S2.15.3.66 : iye

P2.15.3.67 : saya mau tanyakan lagi kan ini $a^2 = 21b^2$, kenapa langsung a adalah ... padahal di sini $a^2 = 21b^2$

S2.15.3.67 : tidak kutaumi kak, dulu catatanku begitu

P2.15.3.68 : he ... he ... kenapa kira-kira a^2 ?, apa dasarnya ini kan masih $a^2 = 21b^2$

S2.15.3.68 : iya, sebenarnya kak toh, nda tau ini adalah ini apa di'? ... itumi kak deh

P2.15.3.69 : kenapa langsung a ?

S2.15.3.69 : dulu ada di catatanku seperti itu kak, dan ... kulupai kupertanyakan.

P2.15.3.70 : oh iya, iya pade trus jika a adalah faktor persekutuan?

S2.15.3.70 : iye

P2.15.3.71 : apa ini?

S2.15.3.71 : maka dimisalkan k

P2.15.3.72 : apa maksudnya itu a adalah ...

S2.15.3.72 : sebenarnya beginiji intinya kak, dimisalkan itu toh, dimisalkanki b itu sama dengan k cuman diganti

P2.15.3.73 : cuman diganti saja? Apa gunanya diganti? Na sama-samaji, apa bedanyakah b dengan k , kenapa mesti diganti?

S2.15.3.73 : kan mauki diperbandingkan kak

P2.15.3.74 : apa yang mau dibandingkan?

S2.15.3.74 : antara a dengan b apakah dia benar-benar ... , apakah samaki ketika ... apakah inie ... ketika dimisalkanki dengan k ataukah tetap?

P2.15.3.75 : tunggu dulu perbaiki, tuliskanki apa yang akan dikatakan jadi orang ... supaya orang yang membacanya nanti faham jadi tolongki bicara toh dengan penjelasan yang bisa dipahami

S2.15.3.75 : tidak paham ka kak, mau kuapai he ... he ... nda kutaui kerja , nda kutaui maksudnya bagaimana

P2.15.3.76 : ok pale, jadi jika a adalah suatu faktor persekutuan , nda tau jelaskan ini apa maksudnya

S2.15.3.76 : jika a adalah faktor persekutuan

P2.15.3.77 : maka apa ini?

S2.15.3.77 : maka dimisalkan k , ini nda mengertika ini, samaji ini kak yang di atas

P2.15.3.78 : oh begitu di? dan kemudian lagi kenapa itu $a = 21k$?

S2.15.3.78 : kan pemisalan kak

P2.15.3.79 : pemisalan?begitu?

S2.15.3.79 : he .em (mengiyakan) tapi tidak tahu kenapa k di sini, nda kutaui apa fungsinya k yang jelasnya itu pernah dimisalkanki begitu

P2.15.3.80 : iya pale, kemudian kenapa lagi dipangkatduakan a^2

S2.15.3.80 : supaya bisaki sama

P2.15.3.81 : sama dengan apa?

S2.15.3.81 : sama dengan yang di atasnya. (menunjuk)

P2.15.3.82 : yang ini $a^2 = 21b^2$?

S2.15.3.82 : supaya bisaki diperbandingkan

P2.15.3.83 : oh ... supaya bisaki dibandingkan yah, untuk apa itu dibandingkan?

S2.15.3.83 : untuk mendapatkan dan untuk membuktikan apakah dia rasional betulan atau bukan

P2.15.3.84 : oh begitu?

S2.15.3.84 : iye

P2.15.3.85 : trus maka untuk $a^2 = \dots$ apa ini?

S2.15.3.85 : ini toh kak kenapa saya kasi begini, sebenarnya begini kak e $a^2 = a^2$, disinimika mau kuperbandingkan antara hasil yang pertama tadi saya dapatkan kemudian hasil yang kedua yang setelah saya misalkan dengan k

P2.15.3.86 : ya, trus k itu apa? Maksudku...?

S2.15.3.86 : konstanta

P2.15.3.87 : k konstanta?

S2.15.3.87 : Insya Allah
 P2.15.3.88 : Insya Allah? ok ,b?
 S2.15.3.88 : b konstantaji juga tapi penyimbolannya ji yang berbeda
 P2.15.3.89 : apa maksudnya ... maksudnya penyimbolannya? Yang penting kelihatan beda begitu?
 S2.15.3.89 : mmm...
 P2.15.3.90 : yang penting b, k begitu? b dan k begitu?
 S2.15.3.90 : emmm tapi samaji ada yang pertama, ada yang kedua setelah pemisalannya sebelumnya
 P2.15.3.91 : apakah itu konstanta?
 S2.15.3.91 : konstanta itu angka yang mmm.. tetapmi
 P2.15.3.92 : tetap?
 S2.15.3.92 : bukan, angka yang masih bisa diisi tapi ... apalagi itu ... konstanta itu adalah suatu bilangan yang tidak mengandung variabel
 P2.15.3.93 : yang tidak mengandung variabel? Jadi k itu bilangan?
 S2.15.3.93 : iye, nanti
 P2.15.3.94 : oh bilangan, nanti?
 S2.15.3.94 : iya. he ... he ... terjebak sendirima ini
 P2.15.3.95 : he... he ... iya jadi k adalah suatu bilangan?
 S2.15.3.95 : (mengiyakan)
 P2.15.3.96 : ok, kita lanjut, jadi tadi di sini
 S2.15.3.96 : perbandingan
 P2.15.3.97 : kita mau bandingkan yah?
 S2.15.3.97 : iya
 P2.15.3.98 : namanya ini $a^2 = a^2$, jadi a^2 -nya ini diambil dari sini (menunjuk)
 S2.15.3.98 : he em (mengiyakan)
 P2.15.3.99 : dan a^2 ini adalah membandingkan $a^2 = 21b^2$ dengan $a^2 = 21k^2$
 S2.15.3.99 : he em (mengiyakan) kan sudah dibandingkanmi ini kak, maka menghasilkan $b^2 = 21k^2$
 P2.15.3.100 : diapakan ini supaya hasilnya seperti ini? Diapakan ini?
 S2.15.3.100 : ini kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{21}$
 P2.15.3.101 : apa dasarnya itu?
 S2.15.3.101 : invers pada perkalian
 P2.15.3.102 : oh invers pada perkalian?
 S2.15.3.102 : iye
 P2.15.3.103 : ok, trus
 S2.15.3.103 : trus $b^2 = 21k^2$
 P2.15.3.104 : a ... kemudian hasil akhir apa ini (a,b)?
 S2.15.3.104 : (a, b) = 21
 P2.15.3.105 : kenapa ini? kenapa baru muncul ini?
 S2.15.3.105 : (a, b) = 1, 3, 7
 P2.15.3.106 : maksud saya ...

- S2.15.3.106 : (a,b) itu adalah faktor persekutuan dari 21
- P2.15.3.107 : (a, b) itu adalah faktor persekutuan?
- S2.15.3.107 : dari 21 karena terbukti 1, 3, 7 itu lebih dari 2 faktor maka dia bukan faktor prima ... prim ... prim ... prim apalagi itu namanya ... itumi deh, jadi dia itu bukan bilangan rasional
- P2.15.3.108 : jadi kan begini dari tadi kita bicara a^2, b^2, k^2 , kenapa tiba-tiba lagi ke (a,b) lagi ini?
- S2.15.3.108 : (a, b) itu adalah kan tadi sudahmika dijelaskan seandainya itu toh ada ... di sini mo padeng menuliskan lagi b adalah faktor kelipatan atau faktor persekutuan dari 21 jadi (a, b) itu adalah 1, 3 dan 7, b = 1, 3 dan 7 jadi dapatki kusimpulkan (a,b) = 1, 3 dan 7. Ini adalah faktor persekutuan atau faktor kelipatan dari 21
- P2.15.3.109 : karena dapat hasilnya ini toh, apa pale hubungannya dengan di atas Anda membuktikan bukan bilangan rasional, apanya yang bisa membuktikan bahwa dia bukan bilangan rasional
- S2.15.3.109 : yang saya tahu kalo misalnya dia bukan ... apalagi namanya ... faktor prima tadi kuingatki namanya tapi kulupaiki lagi, yang jelasnya kalo dia bukan merupakan relatif prim
- P2.15.3.110 : nah ada lagi relatif prim, apa itu relatif prim?
- S2.15.3.110 : relatif prim itu adalah hanya bilangan itu sendiri dan dirinya sendiri
- P2.15.3.111 : apa itu hanya bilangan itu sendiri? Saya tidak paham itu apa relatif prim? Langsung Anda bilang hanya bilangan itu sendiri dan hanya bilangan ... apa tadi?
- S2.15.3.111 : dibagi dengan 1 dan bilangan itu sendiri
- P2.15.3.112 : itu relatif prim?
- S2.15.3.112 : bukan. Bilangan prima itu
- P2.15.3.113 : ha... ha ... apa itu relatif prim pale?
- S2.15.3.113 : kalo relatif prim itu hanya memiliki 1 saja, 1 to' faktor misalnya 3 dengan 5, kalo 3 dengan 5 artinya 3 ji dengan 5 tidak adami yang lain ... eh salah
- P2.15.3.114 : nda ada, maksud saya apa? diulangi coba ... coba.
- S2.15.3.114 : kalo relatif prim itu hanya memiliki 1, ... 1 atau 2? Satu yang ... satu saja ...
- P2.15.3.115 : satu apa?
- S2.15.3.115 : satu faktor primanya
- P2.15.3.116 : faktor primanya, apa itu faktor prima lagi?
- S2.15.3.116 : faktor prima itu adalah didapatkan dari bilangan-bilangan prima, faktor prima itu adalah pembagi dari suatu bilangan yang merupakan bilangan prima misalnya 2, 3, 5, 7
- P2.15.3.117 : 2, 3, 5, 7? Apa hubungannya dengan tadi itu relatif prim?
- S2.15.3.117 : relatif prim itu adalah 1, 1 to' ji faktornya
- P2.15.3.118 : faktor prima bukan tadi, kan 1 bukan ...

S2.15.3.118 : bukan, tdk masukki 1 makanya 1 to'ji faktor primanya
 P2.15.3.119 : tadi kan anda bilang, faktor primanya 2, 3, 5 kok 1 masukki lagi
 S2.15.3.119 : tidak jadi tidak masukki 1 kak, tidak masukki 1 ... khilafka tadi
 P2.15.3.120 : jadi, 1 kan?
 S2.15.3.120 : jadi relatif prima itu hanya 1, 1 to'ji faktornya bukan 1, bukan ada angka 1 kak, tapi jumlahnya 1 ji faktornya
 P2.15.3.121 : coba ... coba kasih saya contoh supaya saya paham
 S2.15.3.121 : contohnya padeng angka 5, itu 5 ji juga faktor primanya
 P2.15.3.122 : oh ya trus?
 S2.15.3.122 : 3 juga 3 ji, jadi misalnya kalo ini dua bilangan inimi namanya relatif prim
 P2.15.3.123 : oh seperti itu?
 S2.15.3.123 : iya
 P2.15.3.124 : ok ... ok trus yang saya mau tanya de' nah
 S2.15.3.124 : iye kak
 P2.15.3.125 : yang tadi kan awalnya tidak disebut-disebut itu relatif prim. kemudian kenapa anda masukkan lagi relatif prim di akhir
 S2.15.3.125 : relatif prim di bawah
 P2.15.3.126 : apa yang bisa dibuktikan dengan pembuktianta di bawah dengan menggunakan relatif prim? Yang mau dibuktikan itu $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional, yang mana yang dibuktikan?
 S2.15.3.126 : yang di sini kak e
 P2.15.3.127 : yang mana itu?
 S2.15.3.127 : di sini (sambil menunjuk) kayaknya dari awal memang haruski disebutkan relatif prim
 P2.15.3.128 : dimana mau disebutkan?
 S2.15.3.128 : yang 21, yang a adalah faktor persekutuan dari 21
 P2.15.3.129 : yang itu?
 S2.15.3.129 : iye
 P2.15.3.130 : trus ini a adalah faktor persekutuan dari 21 1, 3, 7 ini juga 1, 3, 7 jadi apa yang ... apa yang membuktikan bahwa dia bilangan rasional?
 S2.15.3.130 : jadi dia bukan bilangan rasional kak
 P2.15.3.131 : bukan bilangan rasional?
 S2.15.3.131 : bukan rasional karena dia itu tidak relatif prim karna yang saya tahu kalo misalnya untuk menentukan dia ... apakah dia bilangan rasional atau tidak, dia itu ... salah satu cirinya harus relatif prim, nah dari awal kan ...
 P2.15.3.132 : ok apanya yang relatif prim, yang mana?
 S2.15.3.132 : relatif prim itu yang dari bilangan yang akan dibuktikan
 P2.15.3.133 : iya, yang mana itu bilangan yang dibuktikan?
 S2.15.3.133 : 21
 P2.15.3.134 : 21?

S2.15.3.134 : iya

P2.15.3.135 : oh, begitu di?

S2.15.3.135 : iya begitu pemahamanku.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 tidak mampu membuktikan soal dengan benar, banyak langkah-langkah yang terlewati (tidak sistematis) dan alasan yang tidak jelas dan lengkap.. Adapun langkah-langkah dan alasan yang tidak jelas adalah:

- Subjek tidak mampu menjelaskan mengapa menggunakan pembuktian dengan cara memisalkan, dalam hal ini subjek menyamakan kata “memisalkan” dan “mengandaikan”.
- Pada langkah dimana $21 = \frac{a^2}{b^2}$ subjek menggunakan penamaan yang salah yaitu operasi sifat pada perkalian dengan mengalikan kedua ruas dengan b^2 menjadi $\frac{a^2}{b^2} \times b^2 = a^2$, dimana b^2 langsung dicoret, subjek menggunakan cara sistem coret sehingga didapat hasilnya menjadi $21b^2 = a^2$
- Dari langkah $a^2 = 21b^2$ subjek langsung mengatakan bahwa a adalah faktor persekutuan 1, 3, 7, namun melangkahi a^2 atau tidak menjelaskan kenapa dengan a^2 .
- Dengan menyebutkan konsep yang salah yaitu faktor persekutuan dan istilah yang dimunculkan sendiri oleh subjek yaitu faktor kelipatan namun istilah ini tidak pernah ada, dan subjek menuliskan pada langkah pembuktiannya bahwa a adalah faktor persekutuan 1, 3, 7, 21 sedangkan pada ujian tulisan yang lalu menuliskan bahwa a adalah faktor kelipatan 1, 3, 7, 21, dimana subjek mengatakan bahwa faktor kelipatan artinya 21 mempunyai kelipatan 1, 3, 7, subjek juga tidak mampu membedakan antara

faktor dan kelipatan dan menyamakan istilah faktor kelipatan dengan dan faktor persekutuan.

- Subjek tidak mampu menjelaskan apa maksud dari $a = 21 k$, subjek hanya mengikuti cara yang dipakai oleh dosennya tanpa mengetahui alasannya mengapa digunakan, subjek juga mengatakan bahwa k adalah suatu konstanta, dimana konstanta adalah angka yang tetap, lalu mengatakan konstanta adalah suatu bilangan yang tidak mengandung variabel
- Cara memangkatduakan pada kedua ruas yang salah yaitu $(a)^2 = (21 k)^2$ menjadi $a^2 = 21k^2$ di mana 21 tidak dipangkatduakan.
- Penamaan konsep yang salah yaitu membandingkan $a^2 = 21b^2$ dengan $a^2 = 21k^2$ padahal bukan membandingkan tapi menggunakan sifat kesamaan karena $a^2 = a^2$, maka $21b^2 = 441 k^2$
- Tidak menggunakan sifat asosiatif pada perkalian pada $\frac{1}{21} (21b^2) = \frac{1}{21} (441 k^2)$ menjadi $\left(\frac{1}{21} \times 21\right) b^2 = \left(\frac{1}{21} \times 441\right) k^2$
- Menyatakan bahwa $\frac{1}{21} \times 21 = 1$ adalah sifat invers pada perkalian
- Subjek menuliskan (a,b) merupakan faktor persekutuan dari 21 dimana penyimbolan (a,b) tidak dipakai pada penggunaan faktor persekutuan tapi merupakan relatif prim.
- Subjek menggunakan Istilah relatif prim adalah hanya dapat dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri kemudian subjek meralat lagi dan mengatakan bahwa relatif prim hanya memiliki 1 faktor primanya dengan menyebutkan faktor prima adalah pembagi dari suatu bilangan yang merupakan bilangan prima misalnya 2, 3, 5,7 dengan contoh yang

salah yaitu 5, 5 juga adalah faktor primanya, 3, 3 juga adalah faktor primanya jadi dua bilangan ini yaitu 3 dan 5 merupakan relatif prim.

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.15.3.1; S2.15.3.2; S2.15.3.3; S2.15.3.4; S2.15.3.19; S2.15.3.25; S2.15.3.28; S2.15.3.29; S2.15.3.31; S2.15.3.33; S2.15.3.43; S2.15.3.44; S2.15.3.47; S2.15.3.48; S2.15.3.49; S2.15.3.52; S2.15.3.53; S2.15.3.54; S2.15.3.56; S2.15.3.58; S2.15.3.61; S2.15.3.67; S2.15.3.75; S2.15.3.78; S2.15.3.79; S2.15.3.99; S2.15.3.101; S2.15.3.103; S2.15.3.104; S2.15.3.105; S2.15.3.106; S2.15.3.107; S2.15.3.108; S2.15.3.109 dan S2.15.3.110] atas pertanyaan [P2.15.3.1; P2.15.3.2; P2.15.3.3; P2.15.3.4; P2.15.3.19; P2.15.3.25; P2.15.3.28; P2.15.3.29; P2.15.3.31; P2.15.3.33; P2.15.3.43; P2.15.3.44; P2.15.3.47; P2.15.3.48; P2.15.3.49; P2.15.3.52; P2.15.3.53; P2.15.3.54; P2.15.3.56; P2.15.3.58; P2.15.3.61; P2.15.3.67; P2.15.3.75; P2.15.3.78; P2.15.3.79; P2.15.3.99; P2.15.3.101; P2.15.3.103; P2.15.3.104; P2.15.3.105; P2.15.3.106; P2.15.3.107; P2.15.3.108; P2.15.3.109 dan P2.15.3.110] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara pada materi pembuktian bilangan rasional, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami karena tidak dapat menunjukkan suatu bilangan merupakan bilangan rasional atau bukan melalui bukti kontradiksi. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep bilangan rasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Urutan Pada Bilangan Real.**

Transkrip wawancara 4 nomor 16

P2.16.4.1 : oh ini adalah wawancara keempat, nomor 1 adalah jika $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $a < b$ dan $c < d$, buktikan bahwa $ad + bc < ac + bd$!

S2.16.4.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit)

P2.16.4.2 : bisa anda jelaskan apa yang ditulis?

S2.16.4.2 : jadi ... e ... dari soal kan diketahui $a < b$ dan sesuai dengan teorema kalo $a < b$ itu artinya $b - a$, kalo $c < d$ maka $(d - c)$

P2.16.4.3 : $d - c$? iye, saya tanya dulu, ini teorema dari mana anda dapatkan, anda bilang teorema kan? Dari mana di dapat, dari mana, teorema apa? Teorema pada apa?

S2.16.4.3 : teorema pada sifat urutan.

P2.16.4.4 : bunyinya seperti apa? diingat

S2.16.4.4 : tidak

P2.16.4.5 : tidak ingat? Apa yang diingat pada sifat urutan

S2.16.4.5 : itu ji kak, yang kuingat kalo ini begini, nda kutauki bunyinya

P2.16.4.6 : oh begitu saja di'

S2.16.4.6 : he em (mengiyakan)

P2.16.4.7 : ok, silahkan terus lanjutkan!

S2.16.4.7 : nah selanjutnya $ad + bc < ac + bd$, nah di situ kita memulai menjabarkan dan di sini saya ingin menuju ke $b - a$ sesuai dengan yang diketahui

P2.16.4.8 : anda mau menuju ke?

S2.16.4.8 : Kesini (b-a)

P2.16.4.9 : Kesini ?

S2.16.4.9 : Iya

P2.16.4.10 : Darimnana

S2.16.4.10 : Dari ini

P2.16.4.11 : Dari sini mau kesini

S2.16.4.11 : Heem

P2.16.4.12 : Ok trus lanjut

S2.16.4.12 : Ok Kan $ad + bc < ac + bd$, nah artinya $ac + bd < \dots$

P2.16.4.13 : maaf saya potong yah, kan di soal itu diketahui $a < b$ dan $c < d$, kenapa anda membuktikan $ad + bc - ac + bd$ ke sini? Terbalik, kan yang kita mau tuju dari sini ke sini, bukan dari sini ke sini, yang mau dibuktikan adalah kan anda lihat di sini $a < b$ dan $c < d$ buktikan bahwa , jadi yang mana di sini yang mau dibuktikan, mau menuju ke mana?

S2.16.4.13 : ini menuju ke sini

P2.16.4.14 : tapi kenapa tadi ada pernyataan bahwa $ad + bc < ac + bd$ ke $b - a \dots$

S2.16.4.14 : artinya kebalikki kak

P2.16.4.15 : oh terbalikki?

S2.16.4.15 : iye

P2.16.4.16 : trus bagaimana selanjutnya?

S2.16.4.16 : Kan yang mau dibuktikan ini, terus bagaimana, begini caraku?
..mmm ... apa itu kak

P2.16.4.17 : trus yang anda pahami itu bagaimana?

S2.16.4.17 : ada sih toh ... e ... apalagi teorema ... aksioma perkalian kah

P2.16.4.18 : kenapa dengan perkalian?

S2.16.4.18 : perkaliannya ini $(b - a)(d - c)$ maka menghasilkan ... iya ...

P2.16.4.19 : ya ... coba dikali? Maksudnya begini saya tanya lagi yah, dari mana anda dapat bahwa perkalian? Kenapa anda memutuskan bahwa dikali?

S2.16.4.19 : karna di sini kan $ad + bc$ memberikan 2 variabel yang dikalikan makanya saya berinisiatif untuk mengalikan

P2.16.4.20 : mengalikannya?

S2.16.4.20 : he em (mengiyakan)

P2.16.4.21 : tidak ada dasar yang lain?

S2.16.4.21 : mmm ...

P2.16.4.22 : adakah dasar yang lain, kenapa anda mengalikannya?

S2.16.4.22 : dilihatji dari yang diketahui

P2.16.4.23 : dilihatji dari yang diketahui saja?

S2.16.4.23 : he em (mengiyakan)

P2.16.4.24 : ok lanjut, coba anda kali ... coba di sini!

S2.16.4.24 : (mengerjakan) sama ji kak ... samaji kak

P2.16.4.25 : ok, jadi apa dihasilkan? Apa yang anda hasilkan ... coba ceritakan?

S2.16.4.25 : jadi sesuai dengan perkalian $(b - a)(d - c)$ maka akan mendapatkan, kembaliji kak

P2.16.4.26 : maksudnya kembali? Maksudnya kemana kembalinya?

S2.16.4.26 : mauka ke sini

P2.16.4.27 : ok, silahkan

S2.16.4.27 : Tunggu dulu kak Mmm ... mau kuapai ini kak $ad + bc$...
mmm ... $-ad - bc$ terus ... mmm ... ac diku ... $+bd$ jadi $-ad + bc + ac + bd$... mmm ... kalo kita pertukarkan $(ac + bd) - (ad + bc)$ maka $= ac + bd < ad + bc$

P2.16.4.28 : iya

S2.16.4.28 : iye kembalimi kak

P2.16.4.29 : jadi dapat ad -nya, didapatji?

S2.16.4.29 : apa itu kutulis dulu?

P2.16.4.30 : $ac + bd < ad + bd$

S2.16.4.30 : ad, bd, ac, bd, ad, bc ... iya

P2.16.4.31 : ini $ac + bd < ad + bd$?

S2.16.4.31 : tunggu dulu ... tunggu dulu ... mmm ... yah lebih besar artinya kalo dibalikki $ad + bc < ac + bd$

P2.16.4.32 : yah begitu?

S2.16.4.32 : he em terbuktimi kak

P2.16.4.33 : yah, saya tanya dulu ya?

S2.16.4.33 : iya kak

P2.16.4.34 : jadi ini langkah yang ini tadi bagaimana ini? Sampai sini 4 baris?

S2.16.4.34 : sebenarnya tidak salahji juga kak ... mmm ... cuman mauja kembalikanki ke ... ini ... ke yang diketahui karna di ini toh diperbandingkan pake ini yang dijabarkan, kayak dibalikji saja, kalo ini yang kujabarkan akan menghasilkan yang diketahui dan kalo misalnya ini yang diketahui, saya jalankan, yang pake perkalian akan mendapatkanmi ini yang mau dibuktikan ... iya begitu ji kak

P2.16.4.35 : ada lagi yang sangat mendasar, pada ujian tulisan yang lalu toh kan $a < b$ anda bilang di sini, jika $a < b$ maka $b - a$, sedangkan ujian tulisannya yang kemarin jika $a < b$... tidak adaji dibilang jika-nya, $a < b = a < b = a - b$

S2.16.4.35 : $a - b$?

P2.16.4.36 : iya

S2.16.4.36 : yang benar itu adalah $b - a$

P2.16.4.37 : $b - a$?

S2.16.4.37 : iya, makanya salahka disitu kayaknya kak, b-a karna kalo a-b itu salahmi kak

P2.16.4.38 : kenapa dikatakan salah di sini?

S2.16.4.38 : Karna kan diketahui bahwa a itu lebih kecil dari b dan secara otomatis b itu lebih besar dari a dan di setiap di bilangan ini ... e ... yang besar dikurang yang kecil

P2.16.4.39 : jadi yang di sini pernyataan anda yang ujian tulisan salah, ya?

S2.16.4.39 : Iye, salah ki kak

P2.16.4.40 : trus langkah kedua ... e ... langkah selanjutnya, kan anda kali $(b - a)(d - c)$, di sini juga dikali

S2.16.4.40 : tapi $(a - b)$

P2.16.4.41 : iya $(a - b)(c - d)$

S2.16.4.41 : iye kebalik

P2.16.4.42 : anda kalikan bagaimana caranya anda mengalikan ini

S2.16.4.42 : ini dikali dengan ini

P2.16.4.43 : coba dibilang yah karna akan ...

S2.16.4.43 : $(b \cdot d)$ kemudian $b \cdot (-c)$ trus $(-a) \cdot d$ kemudian $(-a) \cdot (-c)$

P2.16.4.44 : oke, ini kan dikali seperti ini, dasarnya apa?

S2.16.4.44 : apanya?

P2.16.4.45 : maksudnya cara ini?

S2.16.4.45 : asosiatif, distributif ... perkalian emmm. ... distributif

P2.16.4.46 : sifat distributif?

S2.16.4.46 : iya

P2.16.4.47 : apa tadi itu distributif perkalian, apa maksudnya?

S2.16.4.47 : apanya?
 P2.16.4.48 : tadi kan sempat dibilang distributif perkalian
 S2.16.4.48 : iya
 P2.16.4.49 : yang mana yang benar distributif saja atau distributif perkalian
 S2.16.4.49 : mmm ... distributif perkalian karna perkalian di situ
 P2.16.4.50 : ok, trus menghasilkan
 S2.16.4.50 : menghasilkan $bd - cb - ad + ac$
 P2.16.4.51 : kemudian ini?
 S2.16.4.51 : kemudian ini mi kak
 P2.16.4.52 : oh, langsung ke sini jadi langkah ini seperti ini
 S2.16.4.52 : ... e .. trus kurang $(-ad - bc + ac + bd)$?
 P2.16.4.53 : $(-ad - bc + ac + bd)$,
 S2.16.4.53 : iya selanjutnya saya keluarkan b yang minus
 P2.16.4.54 : kenapa dikeluarkan?
 S2.16.4.54 : dikeluarkan karna distributifki kak
 P2.16.4.55 : distributif?
 S2.16.4.55 : iya, bisa ji kan dikalikan ke dalam
 P2.16.4.56 : itu distributif, distributif atau distributif ... kan ada tadi 2 yang anda sebut toh
 S2.16.4.56 : distributif
 P2.16.4.57 : distributif saja atau distributif yang tadi
 S2.16.4.57 : perkalian, iya distributif perkalian karna tetapi tadi perkalian
 P2.16.4.58 : iya trus
 S2.16.4.58 : trus ditambah dengan ac kemudian ditambahkan dengan bd setelah itu mmm ... saya tukarkan atau komutatifkan, jadi kan $ac + bd$ itu di belakang sekarang, saya tukarkan ke depan lalu dikurangkan dengan $ad + bc$
 P2.16.4.59 : ya ... yang saya mau tanya ini sama dengan ini kan?
 S2.16.4.59 : sama ,
 P2.16.4.60 : kalo penggunaan dalam kurung ,ini kan ada dalam kurungnya
 S2.16.4.60 : ya, ini juga ada
 P2.16.4.61 : trus saya tanya tadi apakah bedanya ini yang tidak pakai kurung dengan yang ada kurungnya?
 S2.16.4.61 : kalo yang ada kurungnya itu distributif perkalian tapi kalo misalnya tidak ada tanda kurungnya ... cuman mmm ... e ... angka yang berdekatan saja yang bernilai minus
 P2.16.4.62 : yang mana angka yang berdekatan?
 S2.16.4.62 : e ... ini bukan angka sih .. huruf ... ad
 P2.16.4.63 : ad saja?
 S2.16.4.63 : he em (mengiyakan) ad saja yang bernilai minus kalo misalnya tidak pake kurung
 P2.16.4.64 : ok trus dari sini lagi ke sini

- S2.16.4.64 : nah kemudian di sini kan kita sudahmi mendapatkan $(ac + bd) - (ad + bc)$ kan otomatis kalo dikurang itu $(ac + bd) >$ makanya saya memberikan tanda lebih besar dan untuk mendapatkan pembuktian bahwa $(ad + bc) < (ac + bd)$ saya pertukarkanji saja tempatnya karna kan samaji maksudnya artinya di sini kan kalo $(ac + bd)$ itu $>$ dari $(ad + bc)$, kan artinya samaji $ad+bc$ itu lebih kecil atau kurang dari $ac+bd$.. iye
- P2.16.4.65 : jadi dasarnya ini, lebih besar kemudian ditukarkan ini apa?
- S2.16.4.65 : apa ini? yang jelasnya toh kak yang kupahami kalo misalnya untuk tanda lebih besar kan otomatismi misalnya $5 > 3$ nah otomatismi itu $3 < 5$ kayak gituji kak
- P2.16.4.66 : oh begitu?
- S2.16.4.66 : he em
- P2.16.4.67 : ok mmm kalo di sini bisa dilihat yah pada ujian tulisannya ini $ad \dots -ad$ kan ini anda kalikan toh $ac (a - b)(c - d)$ menghasilkan $ac - ad - bc + bd$ kemudian $ac - ad + bc - bd$ trus $-ac - bc + ac - (-bd)$ kemudian hasilnya $-ad - bc + ac + bd$ menghasilkan $-ad + bc + ac + bd$ kemudian hasilnya seperti ini trus kenapa yang saya tanyakan apakah ini jalannya sudah betul? Maksudnya ini cara mendapatkannya sudah betul? Karna ini kan tadi awalnya anda tidak sama
- S2.16.4.67 : he em kebalik, iya
- P2.16.4.68 : tapi menghasilkan nilai yang sama, menghasilkan pembuktian yang sama, dia bisa ke situ juga jadi e yang saya mau tanyakan yang mana yang benar ujian tulisanta yang kemarin atau yang sekarang ini
- S2.16.4.68 : yang sekarang betulmi kak
- P2.16.4.69 : tapi mengapa juga di ujian tulisan yang lalu terbalik tapi bisa sama juga, bisa juga ke sini ... sampai juga kesini
- S2.16.4.69 : emmm ... (berpikir lama) kenapai kak di'? bisa sampai mmm mesti ada yang keliru
- P2.16.4.70 : jadi ini menurut anda salah? (menunjuk ujian tulisan subjek yang lalu)
- S2.16.4.70 : tidak tau
- P2.16.4.71 : tidak tau
- S2.16.4.71 : tunggu dulu kak ... e ... pasti ada yang salah kak karna salah dari awal, jadi pasti salahki, akhirnya ini pemaksaan
- P2.16.4.72 : pemaksaan ini, jadi dipaksa sebenarnya ini?
- S2.16.4.72 : tunggu dulu kak, tidak ... mmm ini kan iya ... trus ... mmm benarmi kak di'?
- P2.16.4.73 : makanya saya tanyaki yang mana yang benar ini karna semuanya bisa

- S2.16.4.73 : yang jelasnya kak ini yang benar itu yang baru sekarang ini kukerjakan, yang kemarin itu salah karna awalnya yang salah, lagipun kalo misalnya benarki entahlah itu unsur apa begitu na benar ataukah yang jelasnya benarki nda taumi kak, kenapa bisa benar itu kak, tapi benarmi kak caranya
- P2.16.4.74 : tapi anda tidak yakin?
- S2.16.4.74 : salahki awalnya.
- P2.16.4.75 : tapi anda tidak bisa menjelaskan kenapa bisa sampai kesitu?
- S2.16.4.75 : samaji caranya kak, samaji caranya
- P2.16.4.76 : iya tapi yang saya herankan terbalik tapi kok bisa sampai ke pembuktian? na terbalik-balik dari awal
- S2.16.4.76 : $ac - ad - bc$ mmm ... samaji kak ... samaji kak
- P2.16.4.77 : samaji?
- S2.16.4.77 : iye, kenapa bisa sama kak ... nda kak ... nda kutau kujelaskan
- P2.16.4.78 : oh, kalo begitu kesimpulannya jawaban yang terakhir itu yang benar yah hari ini?
- S2.16.4.78 : yang hari ini.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 Walaupun subjek dapat membuktikan soal nomor 16 dengan banyak kesalahan pada beberapa langkah pembuktiannya disertai dengan alasan yang tidak jelas, pada dasarnya subjek tidak memahami bagaimana alur pembuktian dengan menggunakan teorema, seperti pada penyelesaian soal Jika $a < b$ dan $c < d$, buktikan bahwa $ad + bc < ac + bd$ jadi yang akan dibuktikan dari yang diketahui $a < b$ dan $c < d$, ke yang akan dibuktikan yaitu $ad + bc < ac + bd$, namun subjek menjawab pertanyaan pembuktian dengan membaliknyanya dari $ad + bc < ac + bd$ ke $a < b$ dan $c < d$. Di bawah ini adapun kesalahan-kesalahan pada langkah dan pemberian alasan yang tidak tepat adalah

- pada ujian tulisan yang lalu subjek menuliskan kalau $a < b$ itu artinya $a - b$, $c < d$ itu artinya $c - d$ walaupun pada saat wawancara subjek mengubah pernyataannya

bahwa $a < b$ itu artinya $b - a$, $c < d$ itu artinya $d - c$, bunyi teorema ini sudah mendekati benar walaupun bunyi dari teorema yang disampaikan subjek belum tepat itu artinya subjek belum memahami betul bagaimana menyelesaikan soal pembuktian dan terkesan menghafal teorema.

- Subjek mengalikan $(b - a)(d - c)$ tapi tidak mampu memberikan alasan yang tepat, subjek hanya mengatakan kalau dilihat dari yang akan dibuktikan yaitu $ad + bc < ac + bd$ mengandung 2 variabel jadi dia mengambil langkah untuk mengalikannya.
- Subjek mendapatkan hasil yaitu $ac + bd > ad + bc$ menjadi $ad + bc < ac + bd$ akhir nya tanpa memberikan alasan yang tepat, subjek hanya memberikan contoh kalau $5 > 3$ otomatis menjadi $3 < 5$.

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.16.4.2; S2.16.4.3; S2.16.4.4; S2.16.4.7; S2.16.4.8; S2.16.4.14; S2.16.4.18; S2.16.4.19; S2.16.4.27; S2.16.4.31; S2.16.4.34; S2.16.4.35; S2.16.4.36; S2.16.4.37; S2.16.4.38; S2.16.4.43; S2.16.4.44; S2.16.4.45; S2.16.4.50; S2.16.4.52; S2.16.4.53; S2.16.4.54; S2.16.4.58; S2.16.4.61; S2.16.4.64; S2.16.4.65; S2.16.4.68; S2.16.4.70; S2.16.4.73] atas pertanyaan [P2.16.4.2; P2.16.4.3; P2.16.4.4; P2.16.4.7; P2.16.4.8; P2.16.4.14; P2.16.4.18; P2.16.4.19; P2.16.4.27; P2.16.4.31; P2.16.4.34; P2.16.4.35; P2.16.4.36; P2.16.4.37; P2.16.4.38; P2.16.4.43; P2.16.4.44; P2.16.4.45; P2.16.4.50; P2.16.4.52; P2.16.4.53; P2.16.4.54; P2.16.4.58; P2.16.4.61; P2.16.4.64; P2.16.4.65; P2.16.4.68; P2.16.4.70; P2.16.4.73] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 16 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami

pembuktian secara matematis berdasarkan pada aksioma, definisi, sifat atau teorema yang berkaitan dengan soal. Dengan demikian subjek S2 tidak memahami konsep pembuktian secara matematis terkait dengan sifat urutan pada bilangan real, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara 4 nomor 17

- P2.17.4.1 : kita lanjut ke nomor 17 yaitu tentukan semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan berikut melalui langkah-langkah yang disertai alasan, mengapa langkah itu ditempuh (alasan dapat berupa aksioma, sifat, definisi atau teorema yang sesuai) $1 < x^2 < 4$!
- S2.17.4.1 : (subjek mengerjakan soal beberapa menit) sebenarnya untuk soal ini kak saya juga kurang paham tapi untuk soal ini saya teringat pada pelajaran kalkulus, kalo misalnya soal yang seperti ini bisa diselesaikan untuk mencari himpunan, himpunan nilai x , caranya itu saya kerjakan dulu $x^2 > 1$ yang menghasilkan x -nya itu $>$ lebih dari ± 1 dan kemudian saya cari lagi himpunan penyelesaian dari $x^2 < 4$ dan di mana menghasilkan $x < \pm 2$, nah setelah itu untuk mencari himpunan penyelesaian dari x bilangan real x mana saja yang memenuhi saya pakai garis bilangan
- P2.17.4.2 : ok stop dulu, saya tanya dulu satu-satu yah ini kan $1 < x^2$ kemudian apa ini (menunjuk)
- S2.17.4.2 : atau
- P2.17.4.3 : atau $x^2 < 4$ dari sini ke sini mengapa anda bisa menuliskannya seperti ini? Dari sini ke sini dari $1 < x^2$ atau $x^2 < 4$, mengapa anda bisa menuliskannya seperti ini?
- S2.17.4.3 : kalkulusnya kak kuingat untuk mencari ... e ... himpunan
- P2.17.4.4 : Kalkulus itu ... pada Kalkulus itu anda tau mengapa ...?
- S2.17.4.4 : tidak tahu
- P2.17.4.5 : kemudian ini **atau** ini kenapa ... maksud saya begini ... e ... makna **atau** di sini apa?
- S2.17.4.5 : sebenarnya makna **atau** di sini, entah ka ini yang memenuhi atau ini yang memenuhi (menunjuk)
- P2.17.4.6 : ya, seperti itu? Jadi pilihan ini ceritanya kalo atau?
- S2.17.4.6 : pilihan
- P2.17.4.7 : iye? Kalo atau?
- S2.17.4.7 : he em (mengiyakan)
- P2.17.4.8 : oh trus yang saya tanyakan lagi mengapa diakarkan kedua-duanya?

S2.17.4.8 : diakarkan karna di sini kan karna x^2 yang mau dicari adalah nilai x yang memenuhi

P2.17.4.9 : x yang memenuhi?

S2.17.4.9 : he em, jadi nilai x -nya itu yang ingin diketahui

P2.17.4.10 : trus apa dasarnya anda mengakarkan dua sisi, kedua ruas?

S2.17.4.10 : untuk ... e ... mendapatkan x ... untuk mendapatkan nilai x

P2.17.4.11 : iya , saya tau tapi alasan, maksud saya memang Tujuan untuk mendapatkan x tapi apa alasan anda menggunakan cara ini?

S2.17.4.11 : apa di? Nda kutaui kak, yang ituji saja

P2.17.4.12 : ok begitu jadi untuk seterusnya ya, kemudian e ... ± 1 kan $\sqrt{1}$, ini kan \pm kan dari 1 tadi kan tidak ada \pm -nya, kenapa tiba-tiba \pm baru akar lagi akar 1

S2.17.4.12 : kan di sini yang menandakan \pm itu $\sqrt{1}$ -nya, kalo 1^2 itu ... itu juga 1, hasilnya kalo $(-1)^2$ juga 1 hasilnya, kalo pengkuadratan dia bisa \pm kuadrat 2

P2.17.4.13 : tapi alasannya menggunakan ini?

S2.17.4.13 : \pm ?

P2.17.4.14 : he em

S2.17.4.14 : alasannya menggunakan \pm ... e ... ituji kak karna moki mendapatkan nilai x

P2.17.4.14 : itu saja? Iya semua kan memang untuk mencari nilai x tapi penggunaan \pm , kemudian akarnya juga , kenapa? ... kenapa?

S2.17.4.14 : karna kan di sini nilai $\sqrt{1}$ itu tidak tentu apakah dia plus atau minus karna kedua bilangannya itu bisa menghasilkan 1 jadi saya pasangkan di situ \pm

P2.17.4.15 : kemudian cara menggambarkan interval, ini yah ini, menggunakan apa ini?

S2.17.4.15 : menggunakan garis bilangan

P2.17.4.16 : yah, garis bilangan, bisa anda jelaskan sedikit bagaimana ... kenapa ada coret-coretan seperti ini? Yah kemudian langsung mendapatkan hasilnya dari sini?

S2.17.4.16 : nah untuk mendapatkan himpunan penyelesaian kan di sini diketahui $\pm 1 < x$ nah makanya kan artinya di situ x -nya itu lebih besar dari ± 1 jadi saya gariskan (-1) garis bilangannya itu ke kanan dan kita ambil lagi titik dari 1 ke kanan juga kemudian ... ituji kak

P2.17.4.17 : kenapa hanya (-2), (-1), (1), (2)

S2.17.4.17 : karna kan yang ada pada soal itu kan cuman $x^2 > 1$ dan $x^2 < 4$ jadi ...

P2.17.4.18 : tidak, maksud saya kenapa ambil titik di sini kita dasarkan (-2), (-1), (1) dan (2) untuk mencari himpunan penyelesaian

S2.17.4.18 : iya, karna kan di sini ... e ... dari hasil yang didapatkan, x -nya $< \pm 2$ dari berdasarkan ituji kak

P2.17.4.19 : oh begitu saja
S2.17.4.19 : he em
P2.17.4.20 : ok, trus ini yang bisa dijelaskan ini arsiran daerah-daerahnya yang diarsir itu?
S2.17.4.20 : kan di sini daerahnya sudahmi diarsir sesuai dengan hasil dari pertidaksamaan tadi, nah kemudian untuk menentukan himpunan penyelesaian yang saya pahami di mana arsiran itu paling banyak, di situlah himpunan penyelesaiannya
P2.17.4.21 : himpunan penyelesaiannya?
S2.17.4.21 : iye
P2.17.4.22 : di mana arsirannya paling banyak?
S2.17.4.22 : iya
P2.17.4.23 : jadi di mana yang paling banyak?
S2.17.4.23 : yang paling banyak itu adalah $x > 1$ dan $x < 2$ artinya antara 1 dan 2
P2.17.4.24 : tunggu dulu yang mana yang banyak ... coba ..., ini kan arsirannya toh, yang mana yang anda lihat banyak?
S2.17.4.24 : inie (menunjuk)
P2.17.4.25 : tapi saya kira hampir sama banyak, maksudnya diarsir
S2.17.4.25 : kan disini toh mulai ini, ini kan sampai di siniji trus yang ini kan di siniji kan arsirannya kan beda kak, banyak ki di sini
P2.17.4.26 : yang lain?
S2.17.4.26 : yang lain itu cuma 2 arsiran, 1 arsiran, di sini ada 3
P2.17.4.27 : 3 arsirannya?
S2.17.4.27 : he em,
P2.17.4.28 : oh yang paling banyak yah? Atau dengan kata lain, anda Tau nda kalo misalnya banyak arsirannya, apa nama lainnya?
S2.17.4.28 : himpunan penyelesaiannya
P2.17.4.29 : iye maksudnya arsiran banyak itu?
S2.17.4.29 : nda kutau, nda saya tahu
P2.17.4.30 : yang jelasnya di sini arsirannya karna banyak yang diarsir toh, tapi kan tadi, jangan dulu tadi kan di bilang **atau** itu adalah pilihan toh?
S2.17.4.30 : he em
P2.17.4.31 : antara apa dan apa ± 1 atau ± 2 , $x > \pm 1$ atau $x < \pm 2$ kan anda bilang tadi pilihan
S2.17.4.31 : iya pilihan
P2.17.4.32 : kenapa palena sekarang 1 dan 2
S2.17.4.32 : antara 1 dan 2 di'? sudah kuduga pertanyaannya begitu ... kenapa itu die?
karna begitumi kak x itu < 2 dan $x > 1$, jadi yang memenuhi itu, karna berpatokanka sama ini kalo lebih kecil itu mengapit dan kalo lebih besar itu pakai atau

P2.17.4.33 : oh seperti itu?

S2.17.4.33 : iya kak

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 tidak mampu menjawab dengan benar soal nomor 17 dan memang mengakui ketidapahamannya pada soal ini, subjek hanya mengingat-ingat pelajaran Kalkulus I yang telah pelajari sebelumnya oleh karena itu banyak konsep-konsep prasyarat yang tidak diketahui. Adapun kesalahan-kesalahan yang terjadi adalah:

- Pada $1 < x^2 < 4$, subjek mengubah bentuk pertidaksamaan menjadi $x^2 < 4$ atau $x^2 > 1$ dengan alasan hanya mengingat pelajaran Kalkulus I yang telah subjek pelajari sebelumnya,
- Subjek tidak mengetahui makna “atau” pada pertidaksamaan di atas, subjek mengatakan kalau pertidaksamaan $x^2 < 4$ yang memenuhi atau $x^2 > 1$ jadi subjek memilih mana pertidaksamaan yang memenuhi
- pada $x^2 > 1$ dan $x^2 < 4$ untuk mendapatkan nilai x , subjek langsung mengakarkan kedua ruas menjadi $x > \pm 1$ dan $x < \pm 2$ kemudian $\sqrt{1} = \pm 1$ dan $\sqrt{4} = \pm 2$ tapi tidak dapat memberikan alasan mengapa mengakarkan kedua ruas dan memberikan alasan yang salah bahwa tidak tentu apakah nilai dari hasil pengakaran dari 1 adalah plus 1 atau minus 1 karena kedua bilangannya itu bisa menghasilkan 1, begitupula pada hasil pengakaran dari 4 adalah plus 2 atau minus 2 karena kedua bilangannya itu bisa menghasilkan 4 jika dipangkatduakan,

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.17.4.1; S2.17.4.3; S2.17.4.4; S2.17.4.5; S2.17.4.6; S2.17.4.8; S2.17.4.11; S2.17.4.12; S2.17.4.14; S2.17.4.15; S2.17.4.16; S2.17.4.18; S2.17.4.20; S2.17.4.23; S2.17.4.30; S2.17.4.31 dan S2.17.4.32] atas pertanyaan [P2.17.4.1; P2.17.4.3; P2.17.4.4; P2.17.4.5; P2.17.4.6; P2.17.4.8; P2.17.4.11; P2.17.4.12; P2.17.4.14; P2.17.4.15; P2.17.4.16; P2.17.4.18; P2.17.4.20; P2.17.4.23; P2.17.4.30; P2.17.4.31 dan P2.17.4.32] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 17 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bagaimana mencari himpunan penyelesaian secara matematis berdasarkan aksioma, definisi, sifat atau teorema yang berkaitan dengan soal. Dengan demikian subjek S2 tidak memahami konsep dalam menentukan himpunan penyelesaian melibatkan operasi himpunan sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Kelengkapan Pada Bilangan Real.**

Transkrip wawancara 5 nomor 18

- P2.18.5.1 : ok , wawancara ke-enam, pada himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ dikenal konsep-konsep: batas atas, batas bawah, terbatas, supremum, infimum, maksimum dan minimum. Jelaskan definisi dari konsep-konsep tersebut!
- S2.18.5.1 : yang pertama adalah batas atas, batas atas pada suatu himpunan di sini ditunjukkan saya menggambarkan sebuah apa ini ... sebuah gambar untuk lebih mudah kita pahami dan di sini batasnya adalah u saya simbolkan sebagai u , di mana u itu merupakan himpunan dari S dan S merupakan himpunan bagian dari bilangan real, nah kalo batas

- atasnya itu $e \dots$ yang dapat saya pahami, batas atas itu terletak di atas S atau himpunan bilangan
- P2.18.5.2 : begitu?
- S2.18.5.2 : iya, a \dots di sininya $u \geq s$ jadi batas atas nya adalah semua yang berada di atas S yang ini S himpunannya yang anggotanya dan juga bisa termasuk dari anggota
- P2.18.5.3 : e \dots iya tunggu dulu yah, saya mau tanya ujian tulisannya yang lalu
- S2.18.5.3 : apami itu kutulis,
- P2.18.5.4 : yang saya mau tanya dulu u itu apa, s itu apa? S itu apa? Jelaskan di' satu-satu u itu apa? u masuk dimana di'? coba
- S2.18.5.4 : kalau u itu adalah mmm \dots batasan, batas
- P2.18.5.5 : batas?
- S2.18.5.5 : anggotanya, apadi? Mmm \dots kan S itu adalah himpunan yang berada di dalam ini, yang ini kak himpunannya ini \dots anggotanya \dots anggotanya adalah s
- P2.18.5.6 : ini \dots ini (sambil menunjuk) yang anda garis di sini toh, yang ini ada s kecil
- S2.18.5.6 : s kecil itu adalah himpunan
- P2.18.5.7 : apa yang ini? daerah apa ini namanya?
- S2.18.5.7 : daerah anggota \dots batasan anggotanya
- P2.18.5.8 : batasan anggota apa?
- S2.18.5.8 : anggota himpunan dari S
- P2.18.5.9 : kalo ini (sambil menunjuk)
- S2.18.5.9 : kalo s itu adalah \dots seperti ini $e \dots$ s itu termasuk dari S dan S itu termasuk dari bilangan real, kayak gitu jadi bagian-bagian ki, ini bagian terkecilnya ki (sambil menunjuk s)
- P2.18.5.10 : oh ini tadi ini yang satu daerah ini kan adalah himpunan, himpunan apa namanya?
- S2.18.5.10 : tunggu dulu kak di
- P2.18.5.11 : jadi ini daerah ini apa namanya?
- S2.18.5.11 : himpunan anggota S , sebenarnya s itu apa di s yang jelasnya kutahu itu himpunan terkecilnya , kayak anggotanya ini, ini mi yang termasuk kayak bilangan yang diketahui kayak gitu kak
- P2.18.5.12 : trus ini yang ini s apa ini?
- S2.18.5.12 : s (s kecil)
- P2.18.5.13 : s ini apa?
- S2.18.5.13 : anunya, ini namanya S , artinya anggotanya itu disimbolkan sebagai s kayak gitu
- P2.18.5.14 : ini s ini s berapa jumlahnya?
- S2.18.5.14 : jumlahnya?
- P2.18.5.15 : he em
- S2.18.5.15 : tidak ditauki kak

P2.18.5.16 : maksud saya ... e ... satu saja s?
 S2.18.5.16 : satuji kak
 P2.18.5.17 : satuji?
 S2.18.5.17 : iye
 P2.18.5.18 : s?
 S2.18.5.18 : he em satuji yang mencakupi semuanya
 P2.18.5.19 : maksudnya satu mencakupi semuanya?
 S2.18.5.19 : ini kan misalnya kayak himpunan bilangan asli, kan disimbolkan sebagai N , bilangan asli itu mulai dari 1 sampai tak terhingga, kayak gituji kak ... itu samaji nah saya tidak tau ...
 P2.18.5.20 : dimana s-nya?
 S2.18.5.20 : s nda kutaui berapa di dalamnya
 P2.18.5.21 : maksudku s-nya yang mana misalnya toh himpunan bilangan asli ini 1 sampai tak terhingga kan, misalnya 1, 2, 3, 4 ... adalah himpunan S pale bilangan asli misalkan 1, 2, 3, 4 dan seterusnya, mana s di situ?
 S2.18.5.21 : kalo kita menentukan suatu angka, menentukanpeki angka ... batasan
 P2.18.5.22 : misalnya saya mau tanyaki pale tentukanki coba s-nya
 S2.18.5.22 : misalnya dari selang $[2,5]$ artinya 2 sampai 5 itu s-nya
 P2.18.5.23 : jadi kalo misalnya S -nya itu bilangan asli yang mana itu s-nya, himpunan bilangan S isinya 1, 2, 3 dan seterusnya, s-nya yang mana?
 S2.18.5.23 : s-nya kak?
 P2.18.5.24 : he em
 S2.18.5.24 : itu kak kalo dibatasipi, yang lebih e ... apa
 P2.18.5.25 : atau begini $S =$ himpunan $[2,7]$ toh selang ini yah
 S2.18.5.25 : selang tertutup?
 P2.18.5.26 : iya, yang mana di sini s-nya?
 S2.18.5.26 : 2 sampai 7
 P2.18.5.27 : sebutkan!
 S2.18.5.27 : 2, 3, 4, 5, 6, 7
 P2.18.5.28 : S bilangan asli, yang u , u itu siapa?
 S2.18.5.28 : nah yang u itu yang berada di atas ataupun di dalam anggota misalnya $[2, 7]$ artinya u -nya itu kan sudah adami keterangannya u itu lebih besar atau sama dengan s , atau bisa juga termasuk anggotanya, itu adalah batasan atasnya, nah kita liat mi bilangan yang berada di atas dari S itumi batas atas misalnya kayak ini termasuk batas atasnya 7, 8 teeet itu
 P2.18.5.29 : trus ini u -nya kalo saya menunjuk batas atas toh, u itu elemen bilangan apa?
 S2.18.5.29 : elemen bilangan S
 P2.18.5.30 : S ?
 S2.18.5.30 : iya masih S eh ... elemen bilangan real

P2.18.5.31 : elemen bilangan real?
 S2.18.5.31 : he em karna s itu termasukki bilangan real
 P2.18.5.32 : jadi u itu elemen bilangan real?
 S2.18.5.32 : iye
 P2.18.5.33 : apakah u bisa juga elemen bilangan S?
 S2.18.5.33 : bisa
 P2.18.5.34 : bisa?
 S2.18.5.34 : he em
 P2.18.5.35 : kapan u adalah himpunan bilangan S, kapan u merupakan anggota dari himpunan S, kapan?
 S2.18.5.35 : yang kutahu kalo seperti ini , kalo dia himpunan bilangan S belum tentu real, ketika u-nya ini tidak melebihi s maybe
 P2.18.5.36 : tidak melebihi s itu bisa ditunjuk di mana itu u?
 S2.18.5.36 : setelahnya s
 P2.18.5.37 : setelahnya s?
 S2.18.5.37 : iye misalnya kalo s di sini ... artinya tidak terbataski kak itu
 P2.18.5.38 : tunggu dulu kan tadi dibilang u itu
 S2.18.5.38 : u itu masuk di s dan juga masuk anggota dari bilangan real
 P2.18.5.39 : kapankah u itu adalah anggota dari himpunan S
 S2.18.5.39 : s ini , s
 P2.18.5.40 : S
 S2.18.5.40 : S?
 P2.18.5.41 : he em
 S2.18.5.41 : himpunannya kak
 P2.18.5.42 : atau saya tanya dulu apakah u masuk himpunan S
 S2.18.5.42 : masuk
 P2.18.5.43 : masuk toh?
 S2.18.5.43 : iya
 P2.18.5.44 : menurut anda kan begitu, kapan dia masuk himpunan S? kapan u dikatakan masuk himpunan S?
 S2.18.5.44 : ketika dia juga termasuk dalam himpunan s
 P2.18.5.45 : yang manakah himpunan ... jangan dulu saya tanya apakah bedanya s dan S
 S2.18.5.45 : ada itu himpunan semesta
 P2.18.5.46 : di sini ... di sini yah?
 S2.18.5.46 : nda mengertika itu pertanyaanta u memang itu kalo diliatki gambarnya dan diliatki definisinya masukki, u itu masukki di himpunan S dan kapan dikatakan masukki di himpunan R, ketika masukki juga di himpunan S
 P2.18.5.47 : iya tapi saya bilang, di mana letak u pale
 S2.18.5.47 : letak u itu antara dan s, letaknya u toh kak
 P2.18.5.48 : jangan dulu, saya tanyaki dulu apakah bedanya di sini S dan s
 S2.18.5.48 : bedanya itu lebih spesifikki s dibanding S

- P2.18.5.49 : saya tanya dulu, gambarki dulu yang mana s dan S dengan beda garis bilangan, coba saya mau tahu dulu, yang mana daerahnya s dan yang mana daerahnya S
- S2.18.5.49 : kalo S itu dari sini teeet ini S besarmi ini semuae, kalo s itu terbataski
- P2.18.5.50 : trus kenapa tadi u disebut elemen bilangan real
- S2.18.5.50 : karna kan sudah ada di keterangannya kalo S adalah himpunan bagian dari elemen real dan u ini termasukki di S jadi secara otomatis dan secara langsung termasukki juga bilangan real
- P2.18.5.51 : apakah u itu hanya 1 saja atau banyak?
- S2.18.5.51 : banyak temannya kak tapi kan untuk sebagai ...
- P2.18.5.52 : maksudku u saja?
- S2.18.5.52 : kalo u 1 ji saja, temannaji banyak
- P2.18.5.53 : jadi itu s , 1 atau banyak?
- S2.18.5.53 : s itu banyak
- P2.18.5.54 : dari mana ke mana disebut banyak?
- S2.18.5.54 : banyak itu yang jelasnya lebih dari 1 dan s itu kan memiliki misalnya kayak tadi yang dicontohkan memiliki selang dan otomatis anggotanya tidak satu kalo memiliki selang kecuali kalo satuji dipasang di situ artinya satuji juga.
- P2.18.5.55 : ok pale, kemudian batas bawah, bisa dijelaskan batas bawah
- S2.18.5.55 : kalo batas bawah itu tidak jauhji bedanya dari batas atas, kalo batas bawah itu memiliki nilai-nilai yang menjadi batasan di bawah yang keterangannya itu u lebih kecil atau samadengan s artinya u itu terletak di bawah setelah himpunan S atau ada bagian atau ada anggota yang sama dengan batasan itu
- P2.18.5.56 : pusingka he ... he ulangi dulu yah, masih kubayangkanki batas atas, saya pusing itu karna saya akan kembali tunggu dulu yah, kan tadi dibilang u itu harus lebih besar atau samadengan s itu batas atas toh, kembaliki ke batas atas dulu di tapu u lebih besar atau samadengan s toh?
- S2.18.5.56 : iye
- P2.18.5.57 : jadi u itu bisa elemen dari bilangan S , bisakah u itu, bisakah saya menunjuk u disembarang tempat, di sembarang daerah pada himpunan bilangan ini (himpunan bilangan S) sehingga dia dikatakan batas atas
- S2.18.5.57 : tidak
- P2.18.5.58 : harus dia di mana?
- S2.18.5.58 : kalo dia tidak diujung s artinya harus setelah s , ujungnya itu artinya pas ki menjadi bagiannya itupun tidak lebih dari satu
- P2.18.5.59 : apakah u itu masuk pada himpunan S
- S2.18.5.59 : iye masuk ki kan keterangannya u itu lebih besar atau samadengan s artinya ada yang samadengan s

P2.18.5.60 : ok, apakah batas atas itu hanya u saja?
 S2.18.5.60 : u dan sekitarnya, u ke atas
 P2.18.5.61 : batas atas itu tunggal atau banyak?
 S2.18.5.61 : batas atas itu banyak
 P2.18.5.62 : oh iya cukup,ok lanjut lagi batas bawah
 S2.18.5.62 : samaji kak itu
 P2.18.5.63 : ulangi dulu de karna saya akan tulis apa yang kita bilang ...
 pemahamanta, batas bawah adalah?
 S2.18.5.63 : batas bawah itu adalah mmm ... nilai-nilai yang menjadi batas
 yang berada di bawah himpunan S ataupun termasuk dalam S dan
 dikenal sebagai
 P2.18.5.64 : himpunan s mana yang ini (menunjuk)
 S2.18.5.64 : himpunan s yang kecil
 P2.18.5.65 : s ?
 S2.18.5.65 : iye dan di sini dapat dibahasakan secara singkat bahwa batas bawah
 itu adalah u lebih kecil atau samadengan s dan bisa menjadi
 himpunan bagian dari s
 P2.18.5.66 : jadi anda mengatakan bahwa s adalah himpunan, s adalah himpunan
 S2.18.5.66 : he em, himpunan, iya.
 P2.18.5.67 : trus ini apa ini S ini ?
 S2.18.5.67 : himpunan juga
 P2.18.5.68 : himpunan juga?
 S2.18.5.68 : himpunan ... anggota mo padeng ini, kalo ini himpunan (menunjuk
 himpunan S) artinya anggotanya yang s, karna kalo saya
 bahasakanmi lagi sebagai himpunan ini artinya dua himpunan dalam
 bilangan real
 P2.18.5.69 : ya trus, yang mana pale yang benar itu
 S2.18.5.69 : yang benar ini adalah himpunan dan ini adalah merupakan anggota
 dari S, s adalah anggota dari S
 P2.18.5.70 : jadi S itu semua garis bilangan ini tadi kan kita bilang dari sini
 sampai sini
 S2.18.5.70 : iye
 P2.18.5.71 : kapan v itu dikatakan ... bisa nda v itu masuk dalam daerah sini
 S2.18.5.71 : bisa
 P2.18.5.72 : kapan
 S2.18.5.72 : ketika dia berada dalam selang yang tertutup
 P2.18.5.73 : selang tertutup?
 S2.18.5.73 : iye, terbuka juga bisa
 P2.18.5.74 : oh terbuka juga bisa?
 S2.18.5.74 : iye yang jelasnya itu ada pasti bagian dari v yang menjadi batasan
 ... bisa tapi tidak semua
 P2.18.5.75 : jadi di mana letaknya v, dia juga merupakan batas bawah dan dia
 juga merupakan anggota dari sini

S2.18.5.75 : terletak di ujung batas s yang paling bawah, diujung batas s yang paling bawah dan daerah paling bawah, daerah bawah, daerah kiri yang lebih dekat dengan s

P2.18.5.76 : maksudnya tunjuk saja di mana?

S2.18.5.76 : inie, dekat dengan s

P2.18.5.77 : oh begitu, di sini kah atau di sini?

S2.18.5.77 : bisa juga pas

P2.18.5.78 : bisa juga pas?

S2.18.5.78 : iye kasi pasmi kak

P2.18.5.79 : yang mana jawabanta, tetapkan jawaban

S2.18.5.79 : yang lebih dekat setelah

P2.18.5.80 : di sini

S2.18.5.80 : iya

P2.18.5.81 : oh ini dikatakan masuk pada

S2.18.5.81 : pada batas bawah

P2.18.5.82 : masuk juga pada s, daerah s

S2.18.5.82 : masuk, bisa masukji juga

P2.18.5.83 : v itu masuk pada selang ini, daerah ini. Kapankah v itu masuk pada daerahnya s, kapan dia juga merupakan batas bawah, tapi dia juga merupakan bagian dari ini yang tutup2 ini

S2.18.5.83 : kapan dia merupakan batas bawah?

P2.18.5.84 : he em, dia juga merupakan batas bawah dan dia juga adalah anggota dari sini, di manaki?

S2.18.5.84 : yang paling dekat setelah ini selang tutup

P2.18.5.85 : tapi kenapa dibilang di sini

S2.18.5.85 : kan ada dua kemungkinanji to kak, kan ada v itu lebih kecil atau samadengan s artinya dia bisa sangat lebih dekat ataukah samaki di titiknya menjadi anggota batas bawah dari v

P2.18.5.86 : tapi kalo di sini sebelumnya ada tanda kurung ini

S2.18.5.86 : insya Allah tidak,

P2.18.5.87 : tadi dibilang ini (sebelumnya ada tanda kurung)

S2.18.5.87 : ini kak e dan setelahnya ke sana

P2.18.5.88 : oh iniji oh diperjelas yah supaya saya tahu, kemudian apa yang dimaksud terbatas?

S2.18.5.88 : terbatas itu jika mempunyai batas bawah dan juga batas atas

P2.18.5.89 : bisa dikasih contoh, apa contohnya terbatas?

S2.18.5.89 : terbatas ... he ... he

P2.18.5.90 : coba contohnya

S2.18.5.90 : misalnya himpunan ... T merupakan himpunan bilangan asli antara 2 dan 5

P2.18.5.91 : kenapa dikatakan terbataski?

S2.18.5.91 : karna terbataski jumlah anggotanya

P2.18.5.92 : itu alasannya?

- S2.18.5.92 : tidak, tidak tepatki sebenarnya ... punyaiki batas atas dan juga batas bawah
- P2.18.5.93 : di mana batas atasnya?
- S2.18.5.93 : batas atasnya itu kan bilangan asli, batas atasnya itu tidak ada ... banyak sekali ... 5, 6, 7
- P2.18.5.94 : itu batas atas
- S2.18.5.94 : batas atas
- P2.18.5.95 : batas bawahnya?
- S2.18.5.95 : batas bawah itu ... tadi kan 3 artinya 3, 2, 1
- P2.18.5.96 : bagaimana contohnya yang tidak terbatas?
- S2.18.5.96 : misalnya yang tidak terbatas itu ... misalnya K elemen bilangan real tidak terbatasmi itu kak karna tidak ditauki yang mana e ... himpunan ... batas bawah dari bilangan real ke kiri dan ke kanannya tidak kita tahu.
- P2.18.5.97 : masih ada contoh yang lain tidak terbatas?
- S2.18.5.97 : tidak terbatas ... ada ... mmm ... himpunan bilangan asli hanya terbatas ke bawah tapi tidak terbatas ke atas
- P2.18.5.98 : contoh yang lain lagi?
- S2.18.5.98 : tidak terbatas di $2n + 1$ dimana n samaji bilangan asli ji juga mau kukasih masuk ituji kak, bilangan asliji palingan, yang tidak terbatas bilangan asli, bilangan cacah ituji kak
- P2.18.5.99 : ok ... ok masuk ke supremum toh ... apa itu supremum? Definisnya yah definisi?
- S2.18.5.99 : supremum jika nilai yang terdapat di batas atas paling terdekat, paling dekatnyami batas atas
- P2.18.5.100 : maksudnya, coba diperjelas carata supaya kita memahami
- S2.18.5.100 : kalo batas atas yang mana ... mana kalo supremum itu jika nilai pada batas atas yang terletak dekat pada ... terletak pada batas atas yang paling bawah... batas atas yang paling bawah
- P2.18.5.101 : berarti ada batas atas yang ditengah dan yang di atas
- S2.18.5.101 : e ... nda tapi maksudnya yang paling dekat dengan anggota himpunan
- P2.18.5.102 : anggota himpunan apa?
- S2.18.5.102 : ini
- P2.18.5.103 : maksudnya anggota himpunan apa?
- S2.18.5.103 : yang paling dekat dengan angota dari himpunan S yaitu s
- P2.18.5.104 : coba ditunjukkan yang mana saja itu batas atas?
- S2.18.5.104 : batas supremumnya itu u , (subjek menuliskan batas atas yang lain)
- P2.18.5.105 : itu v apa itu dengan w ?
- S2.18.5.105 : u , v dan w
- P2.18.5.106 : apa itu v , apa itu w ?
- S2.18.5.106 : samaji kak dia juga merupakan nilai pada batas ... nilai pada supremum, sebenarnya supremum itu tunggalki kak, janganmi ada v

dan w ... yang mana itu tunggal kah? Maksimum? Astagaaa semangat ... ini kak

P2.18.5.107 : jadi yang mana supremumnya di situ?

S2.18.5.107 : bisa u, bisa v, bisa w bisa apa saja yang dituliskan

P2.18.5.108 : jadi supremum bisa u, bisa v, bisa w?

S2.18.5.108 : iya he e (ragu-ragu)

P2.18.5.109 : jadi v dan w itu supremum juga? Kan tadi dibilang u, v, w dan seterusnya adalah supremum

S2.18.5.109 : bisa diganti kak

P2.18.5.110 : apa yang diganti? Apa, bisa diganti?

S2.18.5.110 : tidak, apa itu mau kubilang di', iya kak deh insya Allah, nilai supremum itu u, v dan w, jika dilanjutkanki lagi angka-angkanya kayak gitu menjadi batasan-batasannya

P2.18.5.111 : jadi supremum itu banyak

S2.18.5.111 : itumi pusinga kak, karna dipikaranku ini tunggal 70%

P2.18.5.112 : ada pikirannya bilang tunggal?

S2.18.5.112 : iye

P2.18.5.113 : tapi kenapa pale u, v. w

S2.18.5.113 : khilafka mungkin he ... he ...

P2.18.5.114 : nda ...nda yang mana yang benar , u, v, w adalah supremum tadi itu adalah pernyataan anda, itu artinya supremum itu banyak

S2.18.5.114 : banyak kalo sesuai pernyataanku

P2.18.5.115 : itumi saya bilang, karna sesuai dengan pernyataanta berarti u, v, w supremum dan itu artinya supremum itu banyak, begitu?

S2.18.5.115 : iya

P2.18.5.116 : kemudian saya tanya lagi infimum

S2.18.5.116 : infimum samaji kak, batasan bawah yang paling terdekat dengan s yang masuk dalam anggota himpunan dari S

P2.18.5.117 : tunggu dulu kalo saya bilang yang paling dekat, yang mana yang paing dekat?

S2.18.5.117 : u

P2.18.5.118 : u?

S2.18.5.118 : iya

P2.18.5.119 : jadi infimum, yang mana infimum?

S2.18.5.119 : u ji kak

P2.18.5.120 : u?

S2.18.5.120 : u yang paling dekat

P2.18.5.121 : tadi kan dibilang samaji? Apanya yang dibilang samaji supremum dan infimum?

S2.18.5.121 : huh ... sama ... samaji pengertiannya kak, tapi ini sebenarnya ragu kak, antara tunggalki dia itu supremum dengan infimum atau tidak

P2.18.5.122 : oh ya ... ya

S2.18.5.122 : kalo misalnya tunggalki satuji yang paling dekat itu adalah u-nyaji saja, tapi kalo misalnya tidak tunggalki ... tapi tunggalki perasaan, nda tahumi salah mungkin perasaanku he ... he ...

P2.18.5.123 : ok, maksimum

S2.18.5.123 : maksimum adalah nilai teratas dalam suatu himpunan

P2.18.5.124 : nilai teratas dalam suatu himpunan?

S2.18.5.124 : himpunan e ... bukan ... dalam anggotanya s

P2.18.5.125 : contoh?

S2.18.5.125 : contohnya inimo lagi kak deh selang 3 dengan 7 tapi ini maksimumnya (menunjuk 7) ini minimumnya (menunjuk 3)

P2.18.5.126 : apa perbedaan supremum dan maksimum?

S2.18.5.126 : supremum dan maksimum bedanya kalo supremum itu bisa saja nilainya yang paling atas itu yang terdekatnya anggotanyaji juga eh ... bukan anggotanya, bukan anggota tidak termasuk anggota, bedanya kalo maksimum itu satuji itu tonji yang ada di dalamnya dan itupun ... ituji satuji.

P2.18.5.127 : coba pale nah saya tanya, anda kan kasih contoh tadi, contoh misalnya $A = [3, 7]$, yang mana supremum yang mana maksimum?

S2.18.5.127 : (subjek mengerjakan) kalo maksimum itu 7, kalo supremum itu 8, 9, teet teet

P2.18.5.128 : begitu?

S2.18.5.128 : iye

P2.18.5.129 : tadi apa bedanya tadi supremum dan maksimum?

S2.18.5.129 : kalo maksimumnya itu kayak di dalamki sebagai anggota, kalo supremum itu di luar tapi termasukki dalam himpunan apaaa gitu

P2.18.5.130 : ih ... di luar tapi termasukki dalam himpunan, apa maksudnya?

S2.18.5.130 : himpunan ... himpunan, ini kan kayak s -nya ji toh s , kalo itu yang supremum bisa saja dia termasuk dalam S

P2.18.5.131 : minimum?

S2.18.5.131 : samaji kak

P2.18.5.132 : iya coba?

S2.18.5.132 : minimumnya itu ini (menunjuk 3)

P2.18.5.133 : mana minimum? 3? (setelah melihat subjek menunjuk 3)

S2.18.5.133 : iye

P2.18.5.134 : minimumnya 3, infimumnya mana?

S2.18.5.134 : infimumnya itu, mana dulu batasannya kak tidak ada toh? Tidak adaji, jadi infimumnya itu 2, 1, ini infimum

P2.18.5.135 : jadi apa bedanya infimum dengan minimum?

S2.18.5.135 : bedanya itu kalo mmm minimum nilai terendah dalam suatu anggota dan sedangkan infimum adalah nilai yang paling dekat dari batas bawah

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 tidak mampu mendeskripsikan konsep-konsep yang terkait dengan lengkap dan mendalam, serta masih ada alasan yang tidak tepat (terkesan hanya menghafal secara mekanis). Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.18.5.1; S2.18.5.2; S2.18.5.22; S2.18.5.25; S2.18.5.26; S2.18.5.28; S2.18.5.55; S2.18.5.60; S2.18.5.61; S2.18.5.63; S2.18.5.64; S2.18.5.88; S2.18.5.90; S2.18.5.91; S2.18.5.92; S2.18.5.93; S2.18.5.95; S2.18.5.96; S2.18.5.99; S2.18.5.100; S2.18.5.116; S2.18.5.119; S2.18.5.121; S2.18.5.123; S2.18.5.126 dan S2.18.5.135] atas pertanyaan [P2.18.5.1; P2.18.5.2; P2.18.5.22; P2.18.5.25; P2.18.5.26; P2.18.5.28; P2.18.5.55; P2.18.5.60; P2.18.5.61; P2.18.5.63; P2.18.5.64; P2.18.5.88; P2.18.5.90; P2.18.5.91; P2.18.5.92; P2.18.5.93; P2.18.5.95; P2.18.5.96; P2.18.5.99; P2.18.5.100; P2.18.5.116; P2.18.5.119; P2.18.5.121; P2.18.5.123; P2.18.5.126 dan P2.18.5.135] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara tersebut pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Transkrip wawancara 5 nomor 19

- P2.19.5.1 : ok, kemudian nomor 19, berikan contoh himpunan bilangan yang memiliki batas atas dan batas bawah!
- S2.19.5.1 : iye, jadi contohnya ini kak ... e ... T itu himpunan bilangan bulat, di mana T itu memiliki selang tutup $[-3, 7]$ dan batas atasnya itu ... batas atasnya itu 7, 8, 9 dan sekian sekian, kalo batas bawahnya itu -3, -4, -5 kayak gitu sekian
- P2.19.5.2 : begitu?
- S2.19.5.2 : iye begitu ... begitu kak
- P2.19.5.3 : batas atasnya itu 7, 8, 9?
- S2.19.5.3 : iye
- P2.19.5.4 : batas bawahnya -3, -4, -5?
- S2.19.5.4 : batas bawahnya -3, -4, -5

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap .Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.19.5.1; S2.19.5.3 dan S2.19.5.4] atas pertanyaan [P2.19.5.1; P2.19.5.3 dan P2.19.5.4] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 19 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 20

- P2.20.5.1 : bisakah kamu memberikan contoh himpunan bilangan yang memiliki batas atas tapi tidak memiliki batas bawah!
- S2.20.5.1 : contohnya ... e ... ini (sambil menunjuk) contohnya bilangan ... contohnya himpunan F yang merupakan ... eh ... apa ini di' maksudna ... mmm ... himpunan bilangan bulat negatif
- P2.20.5.2 : himpunan bilangan bulat negatif?
- S2.20.5.2 : iye
- P2.20.5.3 : trus?
- S2.20.5.3 : ituji, tidak kupakekanki ... he ...he ...
- P2.20.5.4 : mana batas e ... tidak memiliki batas atas ... kenapa tidak memiliki batas atas himpunan F itu bilangan bulat negatif?
- S2.20.5.4 : memiliki batas atas mungkin kak
- P2.20.5.5 : oh ... kenapa dibilang memiliki batas atas?
- S2.20.5.5 : karna himpunan bilangan negatif itu kan dimulai dari -1 sampai tak terhingga, nah jadi batas atasnya itu -1, -2
- P2.20.5.6 : begitu ?
- S2.20.5.6 : e ... ini kalo lebih spesifiknya mungkin misalnya -2 dengan -8, nah batas atasnya itu ...ini (sambil menunjuk -2, -1) -2, -1 ituji yang merupakan batas atas trus kalo untuk batas bawahnya itu tidak ada karna masih banyak lagi bilangan yang menjadi batasannya
- P2.20.5.7 : kenapa? Kenapa dia tidak memiliki batas bawah?
- S2.20.5.7 : e ... karna tidak terbatas
- P2.20.5.8 : kenapa dibilang tidak terbatas?
- S2.20.5.8 : karna jumlah dari batas bawahnya itu tidak terhingga
- P2.20.5.9 : ini selangnya F? ini yah berdasarkan pada ini toh?

S2.20.5.9 : he em iya
 P2.20.5.10 : [-2,-8] kenapa tidak memiliki batas bawah eh ... kenapa memiliki ... memiliki batas atas kan yaitu -2, -1 (sambil melihat hasil pekerjaan subjek)
 S2.20.5.10 : iya
 P2.20.5.11 : hanya dua saja batas atasnya?
 S2.20.5.11 : iye duaji saja karna kan bilangan negatif, bulat negatif bukan bilangan bulat
 P2.20.5.12 : trus batas bawahnya?
 S2.20.5.12 : kalo batas bawah itu e ... karna banyaknya sehingga tidak ada, tidak memiliki batas bawah
 P2.20.5.13 : yang mana itu dibilang banyak?
 S2.20.5.13 : banyak
 P2.20.5.14 : banyak apanya?
 S2.20.5.14 : tak terdefinisi kak padeng
 P2.20.5.15 : e ... maksud saya yang mana dibilang, apanya yang banyak?
 S2.20.5.15 : jumlah anggotanya tapi tidak bisa disebutkan karna msih ada lagi dan ada lagi
 P2.20.5.16 : kenapa dibilang tidak bisa disebutkan? Kan antara -2 ji dengan -8
 S2.20.5.16 : kan batasannya toh kak
 P2.20.5.17 : iya batas bawahnya, iya maksud saya apanya yang banyak?
 S2.20.5.17 : anggotanya batas bawah
 P2.20.5.18 : anggotanya batas bawah yang banyakn di'
 S2.20.5.18 : kan di sini kalo beginiki selangnya artinya batas bawahnya itu kan -8, -9, -10, -11 dan semua minus.
 P2.20.5.19 : jadi tidak ada batas bawahnya?
 S2.20.5.19 : iya, tidak ada

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 tidak mampu memberikan contoh yang benar dan tidak mampu memberikan alasan yang tepat. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.20.5.1; S2.20.5.4; S2.20.5.5; S2.20.5.6; S2.20.5.7; S2.20.5.8; S2.20.5.10; S2.20.5.11; S2.20.5.12 dan S2.20.5.19] atas pertanyaan [P2.20.5.1; P2.20.5.4; P2.20.5.5; P2.20.5.6; P2.20.5.7; P2.20.5.8; P2.20.5.10; P2.20.5.11; P2.20.5.12 dan P2.20.5.19] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 20 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami konsep terbatas pada sifat kelengkapan. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep terbatas pada sifat kelengkapan sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara 5 nomor 21

- P2.21.5.1 : berikan contoh himpunan bilangan yang tidak memiliki batas atas dan memiliki batas bawah
S2.21.5.1 : diketahui himpunan bilangan ... diketahui himpunan M bilangan asli, tidak memiliki batas atas tapi memiliki batas bawah yaitu 1
P2.21.5.2 : M elemen apa ini?
S2.21.5.2 : bilangan asli ... M elemen bilangan asli dan batas bawahnya itu 1 dan batas atasnya tidak ada
P2.21.5.3 : ini M besar atau M kecil?
S2.21.5.3 : M besar
P2.21.5.4 : kenapa disebut batas bawahnya 1?
S2.21.5.4 : batas bawahnya 1 kan bilangan asli itu dimulai dari 1 dan tidak adami lagi bilangan setelah ... sebelum 1 yang menjadi bilangan asli
P2.21.5.5 : tunggu dulu batas bawah hanya 1?
S2.21.5.5 : iye
P2.21.5.6 : di sini yah kita ambil bilangan asli juga dia elemen N juga toh ini $2n+1$ n- nya = 1, 2, 3 untuk setiap n elemen N, batas bawahnya 3, 2, 1
S2.21.5.6 : maksudnya 3, 2, 1, iye sampena ji 1 memang kak, ambilka dari luar ke dalam
P2.21.5.7 : maksudnya ini bisa dijelaskan ini kenapa bisa begini 3, 2, 1?
S2.21.5.7 : 3, 2, 1? He ... he ... (sambil tertawa) ini kak e
P2.21.5.8 : maksudnya? Oh jadi kita balik ini oh ... iya pale, ya sudah ya

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 mampu memberikan contoh yang benar namun tidak mampu memberikan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui

respon subjek [S2.21.5.2; S2.21.5.4; S2.21.5.5 dan S2.21.5.6] atas pertanyaan [P2.21.5.2; P2.21.5.4; P2.21.5.5 dan P2.21.5.6] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 21 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 22

- P2.22.5.1 : berikan contoh himpunan bilangan yang tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah!
- S2.22.5.1 : ya jadi himpunan bilangan ... himpunan bilangan real ... J merupakan himpunan bilangan real tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah karna tidak kukasihki memang anu
- P2.22.5.2 : J ini huruf besar?
- S2.22.5.2 : iye J huruf besar karna himpunan
- P2.22.5.3 : tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah?
- S2.22.5.3 : iye himpunan bilangan real
- P2.22.5.4 : kenapa dia disebut tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah?
- S2.22.5.4 : karna ... tidak terbatas bilangan real yang kita ketahui, sangat banyak bilangan real dan saya juga tidak menuliskan dimana selangnya dan lagipula kalo saya tuliskan selangnya pasti tidak adaji juga
- P2.22.5.5 : oh begitu?
- S2.22.5.5 : iye

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 mampu memberikan contoh yang benar dan mampu memberikan alasan. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.22.5.1; S2.22.5.3 dan S2.22.5.4] atas pertanyaan [P2.22.5.1; P2.22.5.3 dan P2.22.5.4] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 22 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.

Transkrip wawancara 5 nomor 23

- P2.23.5.1 : Berikan contoh himpunan bilangan yang supremumnya ada tapi tidak memiliki infimum!
- S2.23.5.1 : hem, inimi ini
- P2.23.5.2 : contoh himpunan yang memiliki supremum dan tidak memiliki infimum
- S2.23.5.2 : contohnya di sini yang kutuliskan adalah himpunan bilangan bulat negatif
- P2.23.5.3 : bilangan bulat negatif nomor berapa itu 23 di?
- S2.23.5.3 : 23
- P2.23.5.4 : ini F? F elemen?
- S2.23.5.4 : elemen bulat negatif
- P2.23.5.5 : mana dibilang bulat negatif?
- S2.23.5.5 : $-Z$
- P2.23.5.6 : trus
- S2.23.5.6 : memiliki supremum tapi tidak memiliki infimum
- P2.23.5.7 : coba bisa kasih saya contoh? Apa? Coba ditunjukkan kenapa bisa supremumnya -1
- S2.23.5.7 : (subjek mengerjakan kembali), -2,4 jadi supremumnya itu adalah -1
- P2.23.5.8 : kenapa supremumnya -1
- S2.23.5.8 : karena supremumnya berada di sebelah kanan yang paling dekat dengan -2
- P2.23.5.9 : infimum?
- S2.23.5.9 : kalo infimumnya itu tidak ada karna banyak lagi bilangan yang setelahnya ini kan ada -5 kemudian -6, -7, dia itu tidak terbatas, tidak terbataski ini

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 tidak mampu memberikan contoh yang benar dan tidak mampu memberikan alasan yang tepat. Hal ini diketahui melalui respon subjek

[S2.23.5.2; S2.23.5.4; S2.23.5.7; S2.23.5.8; S2.23.5.9] atas pertanyaan [P2.23.5.2; P2.23.5.4; P2.23.5.7; P2.23.5.8; P2.23.5.9] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 23 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami konsep supremum pada sifat kelengkapan. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep supremum pada sifat kelengkapan sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara 5 nomor 24

- P2.24.5.1 : ok, lanjut ke nomor 24, berikan contoh himpunan bilangan yang infimumnya ada tapi tidak memiliki supremum!
- S2.24.5.1 : jadi kalo infimumnya itu ada ... oh iya jadi infimumnya itu adalah N elemen bilangan asli jadi infimumnya itu samadengan 1 kalo misalnya lagi saya tuliskan dalam bentuk selang $[2, 6]$ artinya infimumnya itu ada 1 dan supremumnya itu tidak ada
- P2.24.5.2 : kenapa dikatakan tidak ada?
- S2.24.5.2 : tidak ada karna dia itu tidak terbatas ke atas, hanya terbatas ke bawah, tidak terbataski sehingga banyak sekali anggota yang bisa ... ini ... yang ada dalam himpunan, nda dalam himpunan di anu di himpunan bilangan asli, tidak terbataski ini kak (menunjuk himpunan N) ... benarji kak?
- P2.24.5.3 : ya ... ya ... saya paham maksudnya
- S2.24.5.3 : tapi saya kadang biasa tidak pahamka ha ... ha ...
- P2.24.5.4 : coba infimum ya .. ulangi dulu de, infimumnya 1 karena dekat ke 2
- S2.24.5.4 : dekat ke 2
- P2.24.5.5 : begitu?
- S2.24.5.5 : dekat ke bawah ... e 2 itu kan ke kiriki toh kak, kan kalo bilangan asli itu kekiriki, terbatas ke kiri, nah kalo kita lihatki angka 2 itu infimumnya adalah 1 karna dia ... 1 itu merupakan bilangan yang sangat dekat dengan 2 kayak gitu
- P2.24.5.6 : nda ada lagi nilai yang lain selain 1? Kalo saya tanyaki lagi batas bawahnya $[2, 6]$ masih ada?
- S2.24.5.6 : batas bawah?
- P2.24.5.7 : he em
- S2.24.5.7 : tapi elemennya dulu di mana kak?
- P2.24.5.8 : di sini (menunjuk soal)

S2.24.5.8 : kalo bilangan asli itu tidak ada lji batas bawahnya
P2.24.5.9 : 1 ji?
S2.24.5.9 : iye, kalo elemen bilangan asli
P2.24.5.10 : jadi infimumnya juga hanya satu yaitu 1?
S2.24.5.10 : iye kalo bilangan asli

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 tidak mampu memberikan contoh yang benar dan tidak mampu memberikan alasan yang tepat. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.24.5.1; S2.24.5.2; S2.24.5.4; S2.24.5.5 dan S2.24.5.8] atas pertanyaan [P2.24.5.1; P2.24.5.2; P2.24.5.4; P2.24.5.5 dan P2.24.5.8] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 24 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami konsep infimum pada sifat kelengkapan. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep infimum pada sifat kelengkapan sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara 5 nomor 25

P2.25.5.1 : berikan contoh himpunan bilangan yang tidak memiliki supremum dan tidak memiliki infimum?
S2.25.5.1 : iye, jadi yang kuambil itu kak yang bilangan real
P2.25.5.2 : tidak memiliki supremum dan infimum? Oh iya kenapa bilangan real?
S2.25.5.2 : karena dia itu tidak iniki, dia itukan tidak memiliki batas atas dan juga batas bawah, jadi kalo kita tidak bisa menentukan batas atas dan juga batas bawah otomatis tidak bisaki menentukan mana supremum dan juga yang mana infimum

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 mampu memberikan contoh yang benar dan mampu

memberikan alasan. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.25.5.1 dan S2.25.5.2] atas pertanyaan [S2.25.5.1 dan S2.25.5.2] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 25 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.

Transkrip wawancara 5 nomor 26

- P2.26.5.1 : ok, nomor 9 diketahui $A = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Selidikilah apakah himpunan A memiliki batas atas, batas bawah, supremum dan infimum!
- S2.26.5.1 : jadi batas atasnya itu $-\frac{1}{3}$, mulai dari $-\frac{1}{3}$ sampai yang lebih besar dari $\frac{1}{3} \dots -\frac{1}{3}, \dots -\frac{1}{3}, 1$
- P2.26.5.2 : kenapa batas atas atasnya $-\frac{1}{3}$?
- S2.26.5.2 : kan $-\frac{1}{3}$ di'? bilangan asli seharusnya di'?
- P2.26.5.3 : kenapa batas atas atasnya $-\frac{1}{3}$?
- S2.26.5.3 : oh N-nya ji di yang bilangan asli (sambil mengerjakan) ... himpunan bilangan apa ini kah kak untuk keseluruhan
- P2.26.5.4 : e ... lihat saja soal
- S2.26.5.4 : kan N-nya ji ... jadi batas atasnya itu $-\frac{1}{3}, 1, 2, 3$ dan seterusnya iye
- P2.26.5.5 : dari mana dapat $-\frac{1}{3}$?
- S2.26.5.5 : $-\frac{1}{3}$ itu saya substitusikan masuk ... e ... saya substitusikan nilai n, n elemen bilangan asli, yang dimulai dari 1, 2 dan 3 dan saya ambil batas paling bawah dan terbawahnya adalah 1
- P2.26.5.6 : kenapa 1 diambil?
- S2.26.5.6 : 1 karna itumi bilangan asli yang paling ... batas paling bawahnya ... batas bawahnya
- P2.26.5.7 : trus n= 1 maksudnya
- S2.26.5.7 : jadi saya substitusikanmi masuk ke dalamnya
- P2.26.5.8 : kenapa tidak disubstitusi 2?
- S2.26.5.8 : karna saya kan ... e ... batasan yang laing bawah kan cuma 1, jadi saya ... untuk apaka ambilki batas paling atas kalo misalnya ada batas bawah yang lebih memudahkanki

- P2.26.5.9 : trus saya tanya lagi, kenapa ada batas atas 1, 2, 3 lagi?
- S2.26.5.9 : kan batas atas itu kak, yang jelasnya dia termasuk dalam himpunan itu bisaji jadi, kan batas atas itu tidak mutlak, tidak mutlak diambil hanya yang berada di dalam anggota, yang di luar anggota juga diambil ji, kayak gituji
- P2.26.5.10 : maksudku 1 itu kan $-\frac{1}{3}$, didapat dari memasukkan n, 1 ini bagaimana caranya langsung dapat?
- S2.26.5.10 : kan di situ ditaumi kan batasnya itu $-\frac{1}{3}$ dan batas untuk diluarnya itu tidak mestiki kasi masuk angka 2, angka 3, angka 4 tidak mestiki, yang jelasnya batas atas setelah $-\frac{1}{3}$ itu apa?
- P2.26.5.11 : oh .. bisa 1, bisa 2 begitu ... bisa lebih tinggi nilainya begitu?
- S2.26.5.11 : iye yang jelasnya lebih tinggi
- P2.26.5.12 : oh begitu ya ... ya ... ya ... batas bawah?
- S2.26.5.12 : batas bawah iniji ini raguka
- P2.26.5.13 : kenapa itu?
- S2.26.5.13 : kalo batas bawahnya itu ... kan batas bawah ... batas bawah dalam suatu himpunan bisaki tidak mengambil mengambil dari anggotanya yaitu $-\frac{1}{3}$, jadi semua yang bernada minus atau bilangan bulat negatif yang lebih kecil dari $-\frac{1}{3}$ bisa dijadikan sebagai batas bawah
- P2.26.5.14 : apa ini $-\frac{1}{9}$?
- S2.26.5.14 : $-\frac{1}{3}$
- P2.26.5.15 : $-\frac{1}{3}$?
- S2.26.5.15 : eh ... $-\frac{1}{9}$ itu
- P2.26.5.16 : darimana dapat $-\frac{1}{9}$?
- S2.26.5.16 : ini kak e $-\frac{1}{3}$ dulu toh baru $-\frac{1}{9}$, ini kan samaji dengan inie (sambil menunjuk ...) yang inie $-\frac{1}{9}$
- P2.26.5.17 : oh $-\frac{1}{3}$? Jadi bisa itu batas atas sekaligus batas bawah (setelah melihat hasil pekerjaan subjek), $-\frac{1}{3}$ sama dengan di sinikan
- S2.26.5.17 : bisaji kak
- P2.26.5.18 : bisa?
- S2.26.5.18 : iye
- P2.26.5.19 : dari mana dapat $-\frac{1}{3}$? (menanyakan $-\frac{1}{3}$ sebagai batas bawah)
- S2.26.5.19 : samaji kak caranya
- P2.26.5.20 : trus dari mana dapat $-\frac{1}{9}$?

S2.26.5.20 : e ... batasannya kan yang di luar dari anggota kayak begitui kak
alasanku juga

P2.26.5.21 : oh sama dengan di atas karna ini di atasnya $-\frac{1}{3}$ jadi diambil 1

S2.26.5.21 : he em (mengiyakan)

P2.26.5.22 : jadi ini di bawahnya $-\frac{1}{3}$ jadi saya ambil nilainya $-\frac{1}{9}$

S2.26.5.22 : iya kayak gitu, itukan batasan

P2.26.5.23 : di sini yah yang soalta yang lalu yang ujian tulisannya batas atas ta
malah tidak ada ... tidak ada

S2.26.5.23 : tidak ada karna tidak terbatas

P2.26.5.24 : kenapa dibilang tidak ada?

S2.26.5.24 : Karena itu kak kemarin kufikir ada himpunan bilangan real

P2.26.5.25 : apa?

S2.26.5.25 : himpunan bilangan real

P2.26.5.26 : oh, kenapa anda mengatakan bahwa kalo anda memikirkan
bilangan real

S2.26.5.26 : nda tahu bingunga ini kak, tidak jelaski kurasa soalnya

P2.26.5.27 : oh begitu yah

S2.26.5.27 : he em, senadainya ada lagi keterangan bahwa ini toh himpunannya
bilangan real mungkin saja tidak ada batasnya ... semuanya

P2.26.5.28 : jadi yang mana yang benar ini, ini atau ini (menunjuk ujian tulisan
subjek yang lalu dan hasil pekerjaan subjek yang sekarang) yang
ujian tulisan atau ujian yang sekarang ini?

S2.26.5.28 : ujian sekarang yang benar deh kak Insy Allah

P2.26.5.29 : kemudian saya tanya lagi supremumnya

S2.26.5.29 : supremumnya itu tidak ada

P2.26.5.30 : kenapa tidak ada?

S2.26.5.30 : supremumnya tidak ada karna ... kenapa tidak ada? Ada
seharusnya ... ada kak seharusnya

P2.26.5.31 : ada? Apa pale supremumnya

S2.26.5.31 : batas supremumnya itu $\frac{1}{5}$

P2.26.5.32 : kenapa diambil $\frac{1}{5}$?

S2.26.5.32 : karena diambil dari bilangan asli di atas 1

P2.26.5.33 : oh diambil n-nya samadengan?

S2.26.5.33 : 2

P2.26.5.34 : 2, oh begitu di?

S2.26.5.34 : iye, jadi infimumnya ini yang tidak ada

P2.26.5.35 : kenapa infimum tidak ada?

S2.26.5.35 : karna tadi kan untuk batas bawah itu sudahmi diambil 1, 1 sebagai
patokan dan bilangan asli itu tidak termasuk nol dan di bawahnya

jadi saya ambil kesimpulan kalo infimum itu tidak mempunyai batas bawah.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S2 tidak mampu memberikan jawaban yang benar dengan langkah-langkah penyelidikan yang tidak memiliki alasan yang tepat.

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S2.26.5.1; S2.26.5.3; S2.26.5.4; S2.26.5.5; S2.26.5.6; S2.26.5.8; S2.26.5.9; S2.26.5.12; S2.26.5.13; S2.26.5.20; S2.26.5.23; S2.26.5.24; S2.26.5.29; S2.26.5.30; S2.26.5.31; S2.26.5.32; S2.26.5.33; S2.26.5.34 dan S2.26.5.35] atas pertanyaan [P2.26.5.1; P2.26.5.3; P2.26.5.4; P2.26.5.5; P2.26.5.6; P2.26.5.8; P2.26.5.9; P2.26.5.12; P2.26.5.13; P2.26.5.20; P2.26.5.23; P2.26.5.24; P2.26.5.29; P2.26.5.30; P2.26.5.31; P2.26.5.32; P2.26.5.33; P2.26.5.34 dan P2.26.5.35] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 26 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak menentukan batas atas, batas bawah, supremum dan infimum pada suatu himpunan. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami konsep pada sifat kelengkapan sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

4) Validasi Data Pemahaman Subjek S2 dalam menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real

Untuk menguji validitas data pemahaman subjek S2 dalam menyelesaikan soal-soal pada materi Sistem Bilangan Real I, maka dilakukan triangulasi untuk

mencari kesesuaian data pemahaman subjek S1 terhadap soal-soal pada materi Sistem Bilangan Real pada tes uraian dan wawancara. Triangulasi yang dimaksud dilakukan seperti yang disajikan pada tabel berikut.

Tabel 4.12 Triangulasi Data Pemahaman Subjek S1 dalam Menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real pada Tes Uraian dan Wawancara

No Soal	Triangulasi Metode untuk Subjek S2								Keterangan		
	Tes Uraian				Wawancara						
	T M	I	R	F	T M	I	R	F	S	KS	TS
1		✓				✓			✓		
2	✓				✓				✓		
3		✓				✓			✓		
4			✓				✓		✓		
5	✓				✓				✓		
6				✓				✓	✓		
7	✓				✓				✓		
8	✓				✓				✓		
9	✓				✓				✓		
10		✓				✓			✓		
11	✓				✓				✓		
12	✓				✓				✓		
13			✓		✓						✓
14		✓				✓			✓		
15	✓				✓				✓		
16		✓			✓					✓	
17	✓				✓				✓		
18		✓				✓			✓		
19			✓				✓		✓		
20	✓				✓				✓		
21			✓				✓		✓		
22			✓					✓		✓	
23	✓				✓				✓		
24		✓			✓					✓	
25		✓						✓			✓
26	✓				✓				✓		

Keterangan:

TM : Tidak Memahami

I : Instrumental

R : Relasional

F : Formal

S : Sesuai: informasi yang diberikan pada tes uraian sama/sejalan dengan tes wawancara

KS : Kurang Sesuai : informasi yang diberikan berkurang atau bertambah pada tes uraian /tes wawancara

TS : Tidak Sesuai : informasi yang diberikan pada tes uraian tidak sama dengan tes wawancara

Berdasarkan tingkat kesesuaian yang ditunjukkan pada tabel triangulasi di atas diperoleh informasi sebagai berikut.

Subjek S2 menunjukkan bahwa ada 21 dari 26 soal sesuai (konsisten) dengan rincian: kategori pemahaman relasional ada 3 yang sesuai, kategori pemahaman instrumental ada 5 yang sesuai, kategori pemahaman formal ada 1 yang sesuai, sedangkan sisanya 12 soal tidak dipahami oleh Subjek S2. Mayoritas (12 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori tidak memahami soal. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa pemahaman Subjek S2 tidak termasuk ke dalam salah satu dari ketiga kategori pemahaman.

c) Penyajian Data dan Validasi data Subjek S3 tentang Pemahaman dalam Menyelesaikan Soal-soal Materi Sistem Bilangan Real

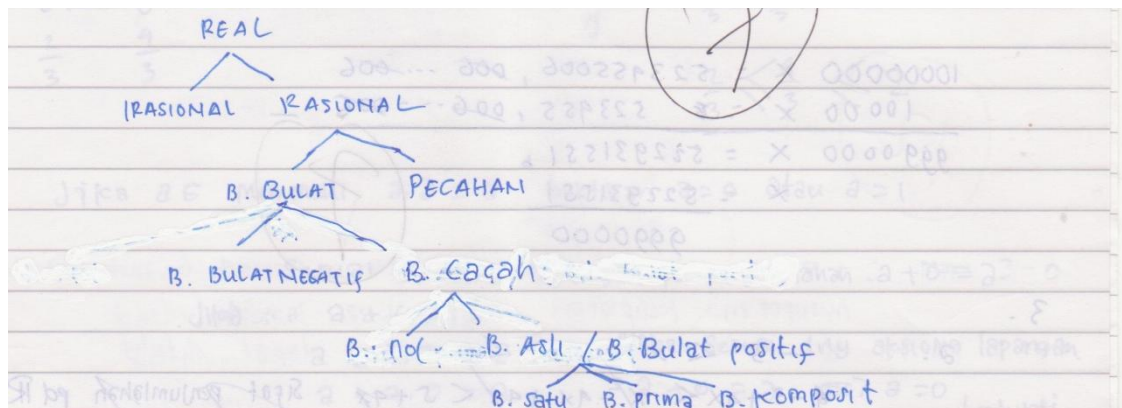
Untuk mengetahui pemahaman subjek terhadap materi Sistem Bilangan Real terlebih dahulu dilakukan penyajian data, validasi data, dan interpretasi data, Tes Uraian Materi Sistem Bilangan Real dilaksanakan pada hari Rabu, 26 September 2012 sedangkan wawancara pertama dilaksanakan pada hari Rabu, 31 Oktober 2012, wawancara kedua dilaksanakan pada Kamis, 1 November 2012, wawancara ketiga dilaksanakan pada hari Jumat, 2 November 2012, wawancara keempat dilaksanakan pada hari Sabtu, 3 November 2012 dan wawancara kelima dilaksanakan pada hari Ahad, 4 November 2012. Semua wawancara dilakukan di Unismuh Makassar.

1) Penyajian Data Pemahaman Subjek S3 dalam menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real melalui Metode Tes Uraian.

Berikut ini adalah hasil tes uraian Subjek S3 tentang pemahaman terhadap Materi Sistem Bilangan Real dalam menyelesaikan soal-soal pada materi tersebut, disertai dengan interpretasinya.

- Pemahaman terhadap Materi Jenis-Jenis Bilangan Real**

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S3 bisa menyebutkan dengan benar jenis-jenis bilangan real dan dapat menjelaskan definisi bilangan-bilangan tersebut dengan baik, namun belum dapat mendefinisikan secara simbolik dan sempurna khususnya untuk bilangan rasional, bilangan irrasional dan bilangan pecahan. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 1 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.



Bil. Rasional	= Bilangan yang dapat dibentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ $b \in \text{bil. bulat}$, $a \in \mathbb{Z}$
contoh	= $\frac{2}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, dll
Bil. irasional	= Bilangan yang bukan merupakan bil. Rasional atau
contoh	= $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, \sqrt{e} , dll
Bil. pecahan	= Bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ $b \in \mathbb{Z}$, dan tidak dapat disederhanakan menjadi bil. bulat.
contoh	= $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, ...
Bil. Bulat	= Bilangan yang memuat Bil. bulat positif dan bilangan bulat negatif serta ^{contoh} nol, Asli, satu, B. Prima & Komposit
contoh	= (-1, -2, -3, 0, 1, 2, 3)
Bil. Bulat negatif	= Lawan bilangan bulat positif
contoh	= (-1, -2, -3, ---)
Bil. cacah	= Bilangan yang dimulai dari angka memuat bil. nol dan bil. asli / bulat positif
contoh	= (0, 1, 2, 3, ---)
Bil. nol	= mer bilangan yang merupakan angka 0
Bil. Asli	= Bilangan yang terdiri dari bil. bulat positif dari (1, 2, 3, ---)
Bil. Bulat positif	= lawan dari bil. bulat negatif
contoh	= (1, 2, 3, 4, ---)
Bil. Satu	= Bil. yang memuat angka 1
Bil. prima	= Bil. yang mempunyai faktor ^{tepat} lebih dari 2 faktor yaitu 1 dan dirinya sendiri
contoh	= (2, 3, 5, ---)
Bil. Komposit	= Bil. yang memiliki lebih dari 2 faktor
contoh	= (4, 6, 8, ---)

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S3 menjawab dengan benar bahwa tidak ada karena tidak dapat dipastikan bilangan real yang paling mendekati bilangan nol, namun tidak dapat menunjukkannya melalui bukti kontradiksi. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 2 pada materi jenis-jenis

bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Tidak ada karena tidak dapat dipisahkan bilangan real yang mendekati bilangan nol, karena jumlah bilangan real yang mendekati bilangan nol tak terhingga banyaknya.

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S3 mampu menjawab dengan benar bahwa diantara bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 tidak berhingga banyaknya bilangan real namun tidak mampu menunjukkan melalui bukti matematis dengan menggunakan teorema yang terkait. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 3 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Tidak berhingga banyaknya, karena bilangan-bilangan real yang berada antara bilangan 1 sampai 3 tidak dapat ditentukan banyaknya.

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 menjawab dengan salah soal tersebut disebabkan ketidaktepatan dalam penulisan hasil akhir namun langkah-langkah yang dilakukan sudah tepat yaitu mengubah bentuk desimal berulang $2,32110111011101 \dots$ menjadi bentuk $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ dengan cara memisalkan $x = 2,32110111011101 \dots$, lalu mengalikannya dengan 100.000 dan 1.000.000.000 kemudian mengurangkannya sehingga angka dibelakang koma yang sama akan habis dan menghasilkan bentuk $\frac{a}{b}$, namun, subjek belum

dapat mengemukakan alasan mengapa memisalkan $x = 2,32110111011101 \dots$

Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 4 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 4 adalah pemahaman relasional.

Bilangan rasional karena dapat dibuktikan dalam bentuk $\frac{a}{b}$

$$2,32110111011101$$
$$100000000 \times = 2321101110,11101110$$
$$10000 \times = 232110,11101110$$
$$99990000 \times = 231878000$$
$$x = \frac{231878000}{99990000} = \frac{231878}{9999}$$

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S3 tidak mampu menjawab dengan benar bahwa jumlah dua bilangan irrasional selalu menghasilkan bilangan irrasional, walaupun subjek memberikan beberapa contoh untuk menunjukkan bahwa jumlah dua bilangan irrasional selalu menghasilkan bilangan irrasional dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua bilangan irrasional. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 5 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga tidak dapat memberi contoh penyangkal bahwa dengan menjumlahkan bilangan irrasional dengan inversnya pada penjumlahan bisa menghasilkan bilangan rasional yaitu 0. Dengan demikian, Subjek S3 tidak memahami konsep penjumlahan bilangan irasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

iya, karena misalnya $\sqrt{2}$ (bil. irrasional)

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 0$$

$2\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S3 menjawab dengan benar bahwa tidak selalu hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah irrasional dengan bukti counter example dengan memberikan contoh penyangkal yaitu $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$, 3 adalah bilangan rasional dengan memberikan alasan bahwa dalam menyelesaikan soal tersebut digunakan sifat perpangkatan. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 6 pada materi jenis-jenis bilangan real di mana subjek memberikan bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga dapat memberi contoh bahwa dengan mengalikan dua bilangan irrasional yang sama berbentuk akar seperti pada contoh di bawah bisa menghasilkan bilangan rasional maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.

Bilangan rasional misalnya $\frac{1}{3}$ (bil. rasional) dikalikan dengan dirinya sendiri:
 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$
 $\frac{1}{9}$ merupakan bilangan bulat dan bil. bulat adalah bilangan rasional.

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 mampu menjawab dengan benar walaupun dengan alasan yang kurang jelas bahwa hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional kecuali jika penyebutnya 0 dengan melihat definisi dari bilangan rasional adalah $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ ini artinya subjek dapat memberikan contoh penyangkal selain itu subjek mengambil contoh bilangan pecahan dibagi dengan bilangan bulat hasilnya pasti bilangan pecahan yang juga merupakan bilangan rasional. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 7 pada materi jenis-jenis bilangan real di mana subjek memberikan bukti melalui counter example (contoh penyangkal) maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.

adalah bilangan rasional
 misalnya $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$
 $\frac{1}{6}$ adalah bilangan rasional.

misalkan a adalah bilangan bulat positif dan b bilangan bulat positif, maka $\frac{a}{b}$ merupakan bilangan rasional karena kita ketahui bahwa bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$, a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

a bil. bulat positif
 b bil. bulat positif

$\frac{6}{4} = \frac{12}{4} = \frac{15}{4}$

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 tidak mampu menjawab dengan benar bahwa jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, maka hasil kali dari kedua bilangan tersebut adalah bilangan irrasional dengan memberikan satu contoh dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua hasil kali kedua bilangan tersebut. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 8 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bagaimana mengklasifikasikan perkalian dua bilangan yang menghasilkan bilangan rasional dan menghasilkan bilangan irrasional. Dengan demikian, Subjek S3 tidak memahami konsep perkalian bilangan rasional dengan bilangan irrasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

termasuk hasilnya termasuk bilangan rasional
misalnya, jika $a = 2$ dan $b = \sqrt{3}$
 $a \cdot b = 2 \cdot \sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{3}$

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 tidak mampu menjawab dengan benar bahwa $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$ didapatkan dengan menggunakan sifat eksponen yaitu mengubah bentuk akar ke bentuk pangkat kemudian mengalikan pangkat dengan pangkat, namun hasil tersebut mestinya $\sqrt{a^2} = a$, untuk $a > 0$, dan $\sqrt{a^2} = -a$ untuk $a < 0$ karena akar dari suatu bilangan positif haruslah positif. Dengan demikian, Subjek S2 tidak memahami pembuktian dengan menggunakan definisi nilai mutlak bahwa $\sqrt{a^2}$ adalah $|a|, \forall a \in \mathbb{R}$ sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

24 $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$, Berikan Alasan
 $\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a}$
 $= \sqrt{a^2}$
 $= (a^2)^{\frac{1}{2}}$
 $= a^{2 \cdot \frac{1}{2}}$
 $= a^1$
 $= a$

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 Subjek menjawab dengan benar namun belum lengkap bahwa nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$) adalah $a = 2$ atau $a = 0$ dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai a satu persatu ke dalam pertidaksamaan tapi tidak menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 10 pada materi jenis-jenis bilangan real,

maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

bil. real a yang mana saja, nilai $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$)?

$$\frac{1}{2}(a)^2 \leq \frac{1}{3}(a)^3$$

misal $a = 2$ misal $a = -2$

$$\frac{1}{2}(2)^2 \leq \frac{1}{3}(2)^3 \quad \frac{1}{2}(-2)^2 \leq \frac{1}{3}(-2)^3$$

$$\frac{4}{2} \leq \frac{8}{3} \quad \frac{4}{2} \leq \frac{-8}{3}$$

$$2 \leq 2,6 \text{ (Benar)} \quad 2 \leq -2,6 \text{ (salah)}$$

(Bulat positif) (Bulat negatif)

misal $a = \frac{1}{2}$ misal $a = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \leq \frac{1}{3}(\sqrt{2})^3$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right) \quad \frac{1 \cdot 2}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{24} \quad 1 \leq \frac{1}{3}\sqrt{2} \text{ (salah)}$$

(pecahan) bil. irrasional

$$\frac{1}{24} \leq \frac{1}{24} \text{ (salah)}$$

$$\frac{2}{8} \quad \frac{3}{8}$$

Jadi bilangan real yang nilai dari $\frac{1}{2}(a)^2$ tidak lebih besar dari $\frac{1}{3}a^3$ adalah bilangan Bulat positif, Bil. Asli, bilangan prima, (positif), bil. komposit (positif), bil. nol,

Catatan.

- B. Bulat positif
- B. Asli
- B. prima
- B. komposit
- B. nol

(positif dan $\neq 1$)

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S3 menjawab dengan benar bahwa kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai satu persatu ke dalam pertidaksamaan

tersebut namun belum dapat mencari himpunan penyelesaian dan mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku dengan menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 11 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Handwritten mathematical work on lined paper:

- Row 1: $(2^2) > 2$, $(-2)^2 > -2$, $(\frac{1}{2})^2 > \frac{1}{2}$, $(\sqrt{2})^2 > \sqrt{2}$
- Row 2: $(2^2) > 2$, $4 > -2$, $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$, $2 > \sqrt{2}$
- Row 3: $4 > 2$ (benar), (benar), $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ (salah), (benar)
- Row 4: tidak berlaku secara umum karena untuk bilangan pecahan tidak berlaku kuadrat bil. pecahan selalu lebih besar atau sama dengan bil. pecahan itu sendiri (2,5)

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 Subjek mampu menjawab dengan benar bahwa akar dari suatu bilangan real positif tidak selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu dengan memberikan contoh penyangkal dan bisa mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku dengan menggunakan aturan atau langkah-langkah berdasarkan aksioma, definisi, teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 12 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 12 adalah pemahaman instrumental.

$$\sqrt{a} \leq 4$$

$$2 \leq 2$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} \leq \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a} \text{ (salah)}$$

tidak berlaku umum ~~h~~ akar dari suatu bil. real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu karena pada ~~a~~ bilangan pecahan tidak berlaku hal tersebut.

• Pemahaman terhadap Materi Sifat Aljabar pada Bilangan Real

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 menjawab dengan benar dengan alasan yang tepat menggunakan teorema $-1(a) = (-a)$ namun masih ada langkah yang terlewatkan yaitu subjek tidak memisalkan $a + b = x$ terlebih dahulu, tapi langsung saja menyamakan bentuk antara $-1(a) = (-a)$ dengan $-(a + b) = -1(a + b)$. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 13 pada materi sifat aljabar pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional..

Buktikan jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $-(a+b) = (-a) + (-b)$!

Bukti $-(a+b) = (-a) + (-b)$

Sesuai teorema 2.1.9 (c) $-(-a) = -a$

$-1 \cdot a = -a$

Maka $-(a+b) = -1(a+b)$ distributif perkalian

$= (-1)(a) + (-1)(b)$ teorema 2.1.9 (c)

$= (-a) + (-b)$

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 tidak mampu menjawab dengan benar karena ketidakteitian subjek dalam menghitung hasil akhir namun secara keseluruhan langkah-langkah yang diambil sudah tepat walaupun ada langkah-langkah

yang terlewat (tidak sistematis) dan alasan yang tidak tepat. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 2 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 2 adalah pemahaman instrumental.

$$\begin{aligned}
 3(2x + \frac{1}{3}) &= 1(3x + (-\frac{1}{2})) \quad \checkmark \text{ distributif perkalian} \\
 6x + 1 &= 12x + (-2) \quad \checkmark \\
 6x + 1 + (-1) &= 12x + (-2) + (-1) \quad \checkmark \text{ (sifat operasi + pada R dan aksioma invers penjumlahan)} \\
 6x + 0 &= 12x + (-3) \quad \checkmark \text{ (aksioma identitas pada penjumlahan)} \\
 6x &= 12x + (-3) \\
 (-12x) + 6x &= (-12x) + (12x + (-3)) \quad \checkmark \text{ Sifat operasi + pada R} \\
 (-12x) + 6x &= (12x + (-12x)) + (-3) \quad \checkmark \text{ Aksioma komutatif pada penjumlahan dan aksioma invers pada penjumlahan} \\
 -6x &= 0 + (-3) \quad \checkmark \text{ Aksioma identitas pada penjumlahan} \\
 -6x &= -3 \\
 (-\frac{1}{6})(-6x) &= (-\frac{1}{6})(-3) \quad \checkmark \text{ Sifat operasi x pada R dan aksioma invers pada perkalian} \\
 (-\frac{1}{6})(-6)(x) &= (-\frac{1}{6})(-3) \quad \checkmark \text{ Aksioma komutatif pada perkalian} \\
 1(x) &= 2 \quad \checkmark \text{ Aksioma identitas pada perkalian} \\
 x &= 2 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

• Pemahaman terhadap Materi Pembuktian Bilangan Rasional

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 tidak mampu membuktikan soal dengan benar, banyak langkah-langkah yang terlewat (tidak sistematis) dan alasan yang tidak jelas dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 15 pada materi pembuktian bilangan rasional, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami karena tidak dapat menunjukkan suatu bilangan merupakan bilangan rasional atau bukan melalui bukti kontradiksi. Dengan demikian, Subjek S3 tidak memahami konsep bilangan rasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Buktikan bahwa $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional.

\Rightarrow Kita ketahui bahwa bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dibentuk $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $b \in \text{bulat}$, $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}$.

Diketahui (diketahui dari konteks) maka dimisalkan $t = \frac{a}{b}$, sedangkan $t = \sqrt{21}$

Jadi

$$t = \frac{a}{b}$$

$$t^2 \sqrt{21} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$(\sqrt{21})^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$21 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = 21 b^2$$

$a = 21$ memiliki faktor persekutuan 1, 3 dan 7, karena

21 memiliki faktor persekutuan lebih dari 2 maka

21 merupakan bukan faktor prima.

Jadi 21 adalah kelipatan

$$\text{misalkan } \cancel{a} = 21 \quad 21k = b$$

$$441k^2 = b^2$$

$b = 441$ memiliki faktor persekutuan 1, 3, 7, dan 21, karena

441 memiliki faktor persekutuan lebih dari 2 maka

441 merupakan bukan faktor prima.

Jadi 441 adalah kelipatan.

$$a = 1, 3, 7$$

$$b = 1, 3, 7, 21$$

karena 21 bukan merupakan faktor prima sehingga

misal salah, sedangkan yang dimisalkan adalah

$$t = \frac{a}{b} \text{ merupakan bentuk bilangan rasional sehingga}$$

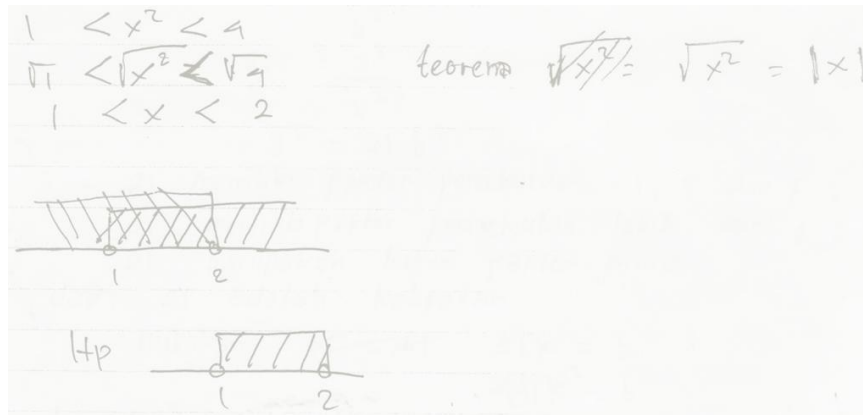
terbukti bahwa $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional.

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Urutan pada Bilangan Real**

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 Subjek mampu membuktikan soal dengan benar melalui langkah-langkah pembuktian yang tepat walaupun dengan alasan yang tidak tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 16 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

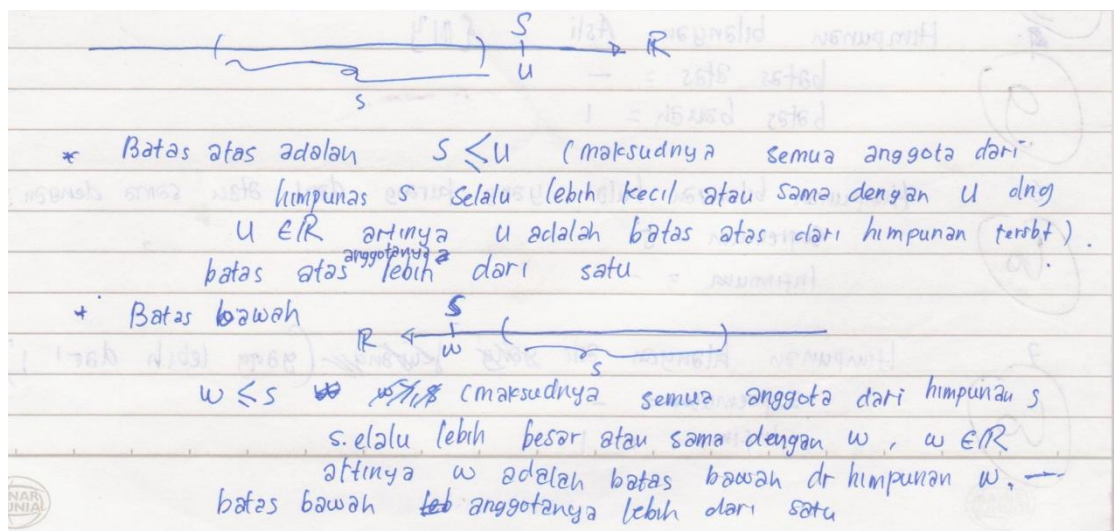
Dik: $a < b$ dan $c < d$ buktikan $ad + bc < ac + bd$
 $a < b \Rightarrow -(a - b)$ *Menye? (alasan?)*
 $c < d \Rightarrow -(c - d)$ *menye? atau?*
 $-(a - b) \cdot -(c - d)$ *teorema 2.1a c*
 $(-a + b)(-c + d)$ $-1(a) = -a$
 $ac + -ad - bc + bd$ *distribusi pemfaktoran*
 $(-ad - bc) + (ac + bd)$ *Aksioma Asosiatif pd penjumlahan*
 $-(ad + bc) + (ac + bd)$
 Jadi $ad + bc < ac + bd$

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 tidak mampu menjawab soal dengan benar karena banyak konsep-konsep prasyarat yang tidak diketahui. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 2 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bagaimana mencari himpunan penyelesaian berdasarkan aksioma, definisi teorema atau sifat yang berkaitan dengan soal. Dengan demikian, Subjek S3 tidak memahami konsep dalam menentukan himpunan penyelesaian melibatkan operasi himpunan, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.



- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Kelengkapan Bilangan Real**

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 mampu mendeskripsikan konsep-konsep yang terkait dengan lengkap dan mendalam, namun belum dapat menjelaskan secara simbolik. Setelah menganalisis hasil tes uraian tersebut pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada jawaban soal nomor 1 adalah pemahaman relasional.



*) terbatas maksudnya di suatu himpunan dikatakan terbatasi apabila himpunan tersebut terbatasi ke bawah dan terbatasi ke atas

*) Supremum adalah batas atas yang terkecil

u merupakan Supremum

*) Infimum adalah batas bawah terbesar

w merupakan infimum

*) Maksimum adalah Anggota himpunan yang terbesar

*) Minimum adlh Anggota himpunan yang terkecil

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 19 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Himpunan bilangan bulat positif ~~yang~~ yang kurang dari 10

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

batas bawah = 1

batas atas = 10

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 20 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Himpunan bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan 5

$\{z \leq 5\}$

batas atas = 5

batas bawah = -

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, Subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 4 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek pada jawaban soal nomor 21 adalah pemahaman relasional.

Himpunan bilangan Asli = $\{N\}$
 batas atas = $-$
 batas bawah = 1

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 mampu memberikan contoh yang benar tanpa memberikan alasan. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 22 pada materi sifat kelengkapan, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Himpunan bilangan bulat = $\{Z\}$

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 mampu memberikan contoh namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 23 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Himpunan bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan 5
 Supremum = 5
 Infimum = $-$

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S1 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang jelas dan lengkap. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 24 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Himpunan bilangan asli yang kurang (yang lebih dari 1)
Supremum =
Infimum =

Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 Subjek mampu memberikan contoh yang benar dengan tidak memberikan alasan. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 25 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Himpunan Bilangan Bulat

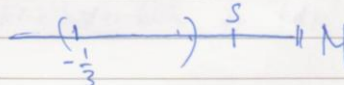
Berdasarkan jawaban dari tes uraian di bawah, subjek S3 mampu memberikan jawaban tetapi tidak sepenuhnya benar dengan alasan yang kurang tepat dan jelas. Setelah menganalisis hasil tes uraian nomor 26 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

$$S = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

misal $n=1$

$$S = \left\{ (-1)^1 \cdot \frac{1}{2(1)+1} \right\}$$

$$= \left\{ -1 \cdot \frac{1}{3} \right\}$$

$$= \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$


batas atas = - Supremum = -
 batas bawah = $-\frac{1}{3}$ Infimum = $-\frac{1}{3}$

tidak memiliki batas atas karena ~~$S \neq \mathbb{R}$~~ $n \in \mathbb{N}$,
 sedangkan bilangan asli tidak memiliki batas atas, karena
 tidak memiliki batas atas maka ~~himpunan~~ himpunan S juga tidak
 memiliki supremum.

2) Penyajian Data Pemahaman Subjek S3 dalam menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real melalui Metode Wawancara.

Berikut ini adalah petikan wawancara dengan Subjek S3 tentang pemahaman dalam menyelesaikan soal-soal pada materi Sistem Bilangan Real I, disertai dengan interpretasinya.

• Pemahaman terhadap Materi Jenis-jenis Bilangan Real

Transkrip wawancara I nomor 1

- P3.1.1.1 : pertanyaan pertama, menurut kamu jenis-jenis bilangan apa saja yang termasuk bilangan real?
- S3.1.1.1 : bilangan rasional, bilangan irrasional, bilangan rasional terdiri dari bilangan bulat dan bilangan pecahan, bilangan bulat terdiri dari bulat positif dan bulat negatif, ee bulat positif atau eee bilangan asli mmmh, bulat positif atau eh bulat positif atau bilangan asli kemudian ada bilangan nol, bilangan nol ditambah dengan bulat positif dia

- menjadi bilangan cacah , kemudian ada lagi bilangan komposit, bilangan prima, eee bilangan satu emmm... ituji.
- P3.1.1.2 : bisa diulang lagi?
- S3.1.1.2 : bilangan rasional dan bilangan irrasional, bilangan rasional dibagi menjadi bilangan bulat dengan bilangan pecahan, bilangan bulat sendiri ada bilangan bulat positif dan bilangan bulat negatif, bilangan bulat positif ditambah dengan bilangan nol menjadi bilangan cacah kemudian ada e ... bisa dibagi lagi menjadi bilangan komposit, bilangan prima, bilangan satu ...
- P3.1.1.3 : pada ujian tulisan yang lalu, anda menggambarkan seperti ini (bagan sistem bilangan real) (sambil menunjuk bagan tersebut) tapi ini kan anda coret, apakah ini salah, apakah yang anda tulis pada ujian tulisan minggu lalu, ini salah atau tidak, mengapa anda coret?
- S3.1.1.3 : tidak salah,
- P3.1.1.4 : tidak salah?
- S3.1.1.4 : Iye!
- P3.1.1.5 : Benar?
- S3.1.1.5 : Ya, benar Cuma masih, ...(bilangan satu, pecahan, bulat positif bulat negatif, bilangan nol, bilangan asli)... iye.
- P3.1.1.6 : Sudah benar yang anda tuliskan?
- S3.1.1.6 : Benar mi kak
- P3.1.1.7 : Iya, sudah benar? Tapi mengapa dicoret?
- S3.1.1.7 : Masih ada tambahannya tapi apa, lupa!
- P3.1.1.8 : Lupa?
- S3.1.1.8 : Iya. Masih ada tambahannya ee bilangan komposit, bilangan prima, bilangan Satu
- P3.1.1.9 : Dimana itu bilangan komposit, bilangan prima, bilangan Satu?
- S3.1.1.9 : Eeh masuk dibilangan asli
- P3.1.1.10 : Ooh masuk dibilangan asli?
- S3.1.1.10 : Iye
- P3.1.1.11 : Jadi mestinya ini (menunjuk....) yang dicoret?
- S3.1.1.11 : iya sudah benar, tapi masih ada yang belum saya tulis
- P3.1.1.12 : ooh masih ada yang belum ditulis ?
- S3.1.1.12 : iya.
- P3.1.1.13 : karena lupa?
- S3.1.1.13 : Iye
- P3.1.1.14 : Ok. Kalo begitu ee sya minta lagi anda menjelaskan satu persatu bilangan tersebut! bilangan real dulu
- S3.1.1.14 : Oh .. Bilangan real terbagi eeh bilangan real itu adalah bilangan yang terdiri dari bilangan rasional dan irrasional, kemudian bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dibentuk menjadi bentuk $\frac{a}{b}$,

- dimana b tidak sama dengan 0 dan b adalah elemen bilangan bulat dan ee b itu merupakan bilangan asli...ee yah itu.
- P3.1.1.15 : a -nya?
- S3.1.1.15 : ehh .. a , a eh ... a , a ee elemen a elemen bilangan bulat .. dan dapat juga eh...menjadi eh dan dapat eh dan ... dan a boleh $=0$
- P3.1.1.16 : Kalo b nya tadi?
- S3.1.1.16 : b tidak boleh sama dengan 0,
- P3.1.1.17 : b nya apa?
- S3.1.1.17 : b elemen bulat dan e..e dan e elemen dan b elemen bulat elemen asli bilangan asli
- P3.1.1.18 : eh yang mana benar bilangan asli atau bilangan bulat?
- S3.1.1.18 : sama ji bu, eh samaji, eh maksudnya b bilangan bulat, b elemen bilangan bulat ..oh salah b elemen bilangan bulat dan b elemen real
- P3.1.1.19 : b elemen bilangan bulat?
- S3.1.1.19 : dan b elemen real, Eh salahmi emm.. \mathbb{Z}
- P3.1.1.20 : \mathbb{Z} ? \mathbb{Z} itu apa?
- S3.1.1.20 : \mathbb{Z} bilangan bulat
- P3.1.1.21 : Trus a nya tadi bilangan?
- S3.1.1.21 : a elemen bilangan bulat dan b eh dan a boleh sama dengan 0,
- P3.1.1.22 : sedangkan b ?
- S3.1.1.22 : b tidak boleh sama dengan 0
- P3.1.1.23 : dan b elemen?
- S3.1.1.23 : b tidak sama dengan 0 dan b elemen bulat kalo a , $a = 0$ dan a elemen bulat
- P3.1.1.24 : bilangan rasional tadi adalah berbentuk?
- S3.1.1.24 : Bilangan rasional adalah bilangan yang bilangan yang dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$, dimana a itu boleh sama dengan 0 dan e... dan a elemen bilangan bulat sedangkan b tidak boleh sama dengan nol dan b elemen bilangan bulat, bilangan rasional adalah eh bilangan irrasional adalan bilangan yang tidak dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$... tidak dapat dibentuk...
- P3.1.1.25 : menjadi $\frac{a}{b}$? jadi bagaimana bentuknya?
- S3.1.1.25 : contohnya akar 3, mmmhh $\pi(phi)$
- P3.1.1.26 : mengapa disebut akar 3 itu bilangan irrasional?
- S3.1.1.26 : bilangan... karena apabila dia disederhanakan menjadi bilangan desimal ee angka yang ada dibelakang koma tidak beraturan misalnya 3, 1239.... Begitu begitu Tidak beraturan angka yang ada di belakang komanya, tidak berulang
- P3.1.1.27 : apalagi? Ada tidak, anda tahu nda ada alasan lagi mengapa akar 3 adalah bilangan irrasional bukan bilangan rasional?
- S3.1.1.27 : tdk dapat di se..., nda adami bu.

- P3.1.1.28 : hanya itu saja ...
- S3.1.1.28 : iye
- P3.1.1.29 : kemudian lanjut lagi penjelasannya
- S3.1.1.29 : bilangan pecahan e bilangan adalah ...
- P3.1.1.30 : tunggu dulu disesuaikan dengan susunannya,
- S3.1.1.30 : ee.. bilangan rasional terbagi atas dua yaitu dibagi lagi menjadi bilangan pecahan dan bilangan bulat. Bilangan pecahan adalah bilangan yang dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$ dengan b tidak boleh sama dengan nol, a boleh sama dengan nol dan a, b elemen bilangan bulat tapi tidak dapat disederhanakan menjadi bilangan bulat..bilangan bulat
- P3.1.1.31 : maksudnya? Bentuknya $\frac{a}{b}$ tidak boleh disederhanakan menjadi bilangan bulat
- S3.1.1.31 : Bentuknya $\frac{a}{b}$ tidak boleh disederhanakan menjadi bilangan bulat
- P3.1.1.32 : apa maksudnya tidak boleh?
- S3.1.1.32 : misalnya $\frac{4}{2}$, eh ... $\frac{4}{2}, \frac{4}{1} = 4$
- P3.1.1.33 : itu contoh bilangan?
- S3.1.1.33 : eh apa, bukan pecahan $\frac{4}{1} = 4$
- P3.1.1.34 : coba diulang pelan-pelan
- S3.1.1.34 : bilangan pecahan yang dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$, di mana a boleh sama dengan nol, b tidak boleh sama dengan nol. a, b elemen bilangan bulat ... eh ... dan tidak dapat disederhanakan menjadi bilangan bulat
- P3.1.1.35 : jadi itu bilangan pecahan?
- S3.1.1.35 : iya, bentuknya $\frac{a}{b}$
- P3.1.1.36 : lanjut
- S3.1.1.36 : ee kemudian bilangan bulat ... bilangan bulat ... eh ... terbagi atas dua yaitu bilangan bulat positif dan negatif
- P3.1.1.37 : tadi bilangan bulat belum di ... bilangan bulat apa pengertiannya bilangan bulat?
- S3.1.1.37 : bilangan bulat itu adalah bilangan eeeh ... yang ... (bagaimana menjelaskan)
- P3.1.1.38 : apa yang kamu tahu saja tentang bilangan bulat? Bilangan bulat adalah apa?
- S3.1.1.38 : bilangan yang terdiri dari ... eh apa, terdiri dari dua bilangan, bilangan bulat positif, eh ... terdiri dari dua bilangan bulat positif dan negatif misalnya negatif satu $-1, -2, -3, 0, 1, 2, 3$ yang ...
- P3.1.1.39 : 0, 1, 2, 3 itu masuk bilangan apa?
- S3.1.1.39 : 0, 1, 2, 3, bilangan bulat positif
- P3.1.1.40 : bilangan bulat positif? Iya?

S3.1.1.40 : iya

P3.1.1.41 : jadi, bilangan bulat? Ulangi tadi, ulangi!

S3.1.1.41 : bilangan bulat adalah bilangan yang terdiri dari bilangan bulat positif dan negatif

P3.1.1.42 : he em ...(sambil mengiyakan)

S3.1.1.42 : contohnya 1, -1, -2, -3, ...

P3.1.1.43 : itu untuk contoh bilangan bulat?

S3.1.1.43 : bilangan bulat negatif, bilangan bulat positif itu ee ... 0, 1, 2, 3

P3.1.1.44 : trus lanjut

S3.1.1.44 : kemudian bilangan bulat positif terdiri dari ... ee ... bilangan nol dan bilangan asli kemudian nol? ada nol ditambah dengan bilangan asli ee ... dapat dibentuk menjadi bilangan cacah. Jadi bilangan cacah mulai dari 0, 1, 2, 3 dan seterusnya

P3.1.1.45 : tadi bilangan asli adalah apa?

S3.1.1.45 : bilangan yang dimulai dari angka 1 sampai seterusnya, trus bilangan prima ... eh ... bilangan ...

P3.1.1.46 : bilangan prima masuk di mana?

S3.1.1.46 : he ... he ... (ketawa) ... bilangan ... ee ...

P3.1.1.47 : bilangan apa yang dibagi menjadi apa?

S3.1.1.47 : oh ... bilangan bulat ... bilangan bulat positif ... bilangan bulat negatif. Bilangan bulat positif terdiri dari 0 dan bilangan asli

P3.1.1.48 : trus?

S3.1.1.48 : kemudian bilangan asli terdiri dari ... eh ... 0 tambah bilangan asli itu bilangan cacah, bilangan asli lagi terdiri dari bilangan komposit, prima dan satu, bilangan tadi bilangan bulat positif dibagi menjadi bilangan 0 dan bilangan asli, bilangan 0 dan bilangan asli ... eh ... membentuk bilangan cacah, kemudian bilangan asli lagi dibagi menjadi 3 yaitu bilangan komposit, prima dan satu

P3.1.1.49 : bisa anda jelaskan masing-masing tadi bilangan?

S3.1.1.49 : bilangan komposit adalah bilangan yang memiliki ... bilangan yang memiliki lebih dari 2 faktor sedangkan bilangan prima adalah bilangan yang memiliki ee ... hanya 2 faktor yaitu satu dengan dirinya sendiri, bilangan satu itu angka satu.

P3.1.1.50 : jadi, tadi khan bilangan komposit adalah bilangan yang memiliki 2 faktor ... eh ... lebih dari 2 faktor, mengapa anda ... ? apa maksudnya ... ee ... lebih dari 2 faktor?

S3.1.1.50 : yaitu ... e ... maksudnya selain dirinya sendiri dengan angka satu, masih ada fak ... , eh masih ada angka lain yang menjadi faktornya

P3.1.1.51 : eh, maksud saya, apa maksudnya ... e ... bilangan yang memiliki lebih dari 2 faktor, komposit itu, bilangan komposit adalah bilangan yang memiliki lebih dari 2 faktor, itu apa maksudnya?

S3.1.1.51 : maksudnya ... ee ... faktornya lebih dari 2

- P3.1.1.52 : iya saya tahu faktornya lebih dari 2, tapi apa maksudnya faktor lebih dari 2? Apa maksudnya faktornya lebih dari 2?
- S3.1.1.52 : artinya dia kelipatan
- P3.1.1.53 : kelipatan?
- S3.1.1.53 : iya
- P3.1.1.54 : contoh, bisa kasi, bisa beri contoh?
- S3.1.1.54 : misalnya b, eh ... kalo b khan dia kelipatan 1, 2, 3 artinya ini sudah ... ee ... lebih dari 2 faktornya, ada 3 faktornya
- P3.1.1.55 : tadi khan dibilang ... e ... kelipatan, jadi tadi ada 2 lagi ... 2 lagi istilah kelipatan dan faktor. Apa maksudnya kelipatan di sini? Apa maksudnya faktor?
- S3.1.1.55 : faktor itu faktor persekutuan ... faktornya itu ... aduh ... faktor eh ... faktor itu pembagi
- P3.1.1.56 : faktor itu pembagi, jadi coba ulangi, ulangi coba. Apa yang dimaksud bilangan komposit?
- S3.1.1.56 : bilangan komposit adalah bilangan yang memiliki lebih dari 2 faktor
- P3.1.1.57 : maksudnya?
- S3.1.1.57 : maksudnya, dia hanya memiliki 2 pembagi yaitu angka 1 dengan dirinya sendiri
- P3.1.1.58 : sedangkan bilangan prima?
- S3.1.1.58 : bilangan prima adalah bilangan yang memiliki hanya 2 faktor yaitu dirinya sendiri angka 1
- P3.1.1.59 : saya tanya kembali, apa pengertiannya itu faktor di sini? Apa pengertiannya faktor di sini?
- S3.1.1.59 : mmm ... pembagi
- P3.1.1.60 : pembagi?
- S3.1.1.60 : iya
- P3.1.1.61 : begitu?
- S3.1.1.61 : iya ... iya pembagi
- P3.1.1.62 : jadi apa maksudnya dia memiliki 2 faktor. Maksudnya apa kalo dihubungkan dengan pembagi yang anda bilang tadi?
- S3.1.1.62 : misalnya angka 2 e ... kalo dia dibagi dengan 1 menghasilkan 2, dibagi dengan 2 menghasilkan 1, tidak bisa ada bilangan bulat ... e ... ooh maksudnya apabila dia dibagi dengan bilangan bulat ... e ... bilangan bulat ... e ... misalnya ... se ... misalnya sebuah angka dibagi dengan bilangan bulat ... e ... harus menghasilkan ... harus ... apa maksudnya di ... harus menghasilkan ... e ... oh iya apabila dia dibagi dengan bilangan bulat yang lain ... e ... hasilnya itu minimal ... minimal ... e ... satu, maksudnya, apabila dibagi dengan bilangan bulat yang lain, bilangan yang dihasilkan itu angka 1 ... apa ... faktor yang paling kecil adalah angka 1 dan faktor yang paling besar adalah dirinya sendiri.
- P3.1.1.63 : dirinya sendiri?

S3.1.1.63 : iya

P3.1.1.64 : Ok kita lanjut. apakah masih ada jenis-jenis bilangan yang lain yang masuk bilangan real yang setelah ... e ... selain yang anda sudah sebutkan?

S3.1.1.64 : tidak adami

P3.1.1.65 : sudah tidak ada lagi?

S3.1.1.65 : iya

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek bisa menyebutkan dengan benar jenis-jenis bilangan real namun belum sempurna dalam menjelaskan definisi bilangan pecahan, salah dalam mengklasifikasikan bilangan bulat dan membedakan antara satu bilangan dengan bilangan yang lain. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.1.1.1; S3.1.1.8; S3.1.1.9; S3.1.1.14; S3.1.1.15; S3.1.1.16; S3.1.1.24; S3.1.1.25; S3.1.1.26; S3.1.1.30; S3.1.1.31; S3.1.1.32; S3.1.1.34; S3.1.1.38; S3.1.1.39; S3.1.1.44; S3.1.1.48; S3.1.1.49; S3.1.1.59 dan S3.1.1.62] atas pertanyaan [P3.1.1.1; P3.1.1.8; P3.1.1.9; P3.1.1.14; P3.1.1.15; P3.1.1.16; P3.1.1.24; P3.1.1.25; P 3.1.1.26; P 3.1.1.30; P3.1.1.31; P3.1.1.32; P3.1.1.34; P3.1.1.38; P3.1.1.39; P3.1.1.44; P3.1.1.48; P3.1.1.49; P 3.1.1.59 dan P3.1.1.62] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 1 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada jawaban soal nomor 1 adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara I nomor 2

- P3.2.1.1 : Kita masuk ke nomor 2, menurut kamu, adakah bilangan real yang paling mendekati bilangan nol? jika ada berikan contoh? Jika tidak, mengapa?
- S3.2.1.1 : Tidak ada
- P3.2.1.2 : Tidak ada? mengapa?
- S3.2.1.2 : Karena angka yang mendekati ...eh ... bilangan real yang mendekati bilangan ... e ... yang mendekati bilangan nol tidak dapat ditentukan ... e ... angka berapa yang mendekati bilangan nol ... e ... karna ... e ... apa .. karna antara ... apa ... antara ... e ... antara ... e antara 1 ke 0 itu ... e ... jarak ... eh jarak antara 1 ke 0 bilangan yang eh bilangan ... bilangan yang berada diantara 1 dengan 0 tidak berhingga banyaknya jadi tidak dapat ditentukan angka berapa yang paling mendekati dengan 0
- P3.2.1.3 : Yang paling mendekati dengan 0? ... e ... jadi coba berikan contoh apa yang anda maksud tadi? Apa yang anda maksudkan tidak ada bilangan yang paling mendekati 0
- S3.2.1.3 : Tidak ada bilangan real yang paling mendekati bilangan 0 karna ...e ... antara bilangan 1 dengan 0 mempunyai bilangan-bilangan yang tak terhingga banyaknya ... e antara bilangan 1 dengan 0 mempunyai bilangan-bilangan yang tak terhingga banyaknya ... e ... misalnya ada 0,1; 0,001; 0,00000 sekian koma 1 ... e ... tidak dapat ditentukan ... e ... satu angka yang paling mendekati bilangan 0.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek menjawab dengan benar bahwa tidak ada bilangan real yang paling mendekati bilangan nol, dengan memberikan alasan karena tidak terhingga banyaknya bilangan real sehingga tidak dapat ditentukan mana bilangan real yang paling mendekati 0 namun tidak dapat menunjukkannya melalui bukti kontradiksi. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.2.1.1; S3.2.1.2 dan S3.2.1.3] atas pertanyaan [P3.2.1.1; P3.2.1.2 dan P3.2.1.3] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 2 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 2 adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara I nomor 3

- P3.3.1.1 : Ya, nomor 3 , apakah Apakah bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 berhingga banyaknya atau tidak berhingga banyaknya.
S3.3.1.1 : Tidak berhingga banyaknya
P3.3.1.2 : Mengapa tidak berhingga banyaknya?
S3.3.1.2 : karna antara bilangan 1 sampai dengan bilangan 3 masih banyak e... eh masih banyak bilangan-bilangan yang berada di antaranya ada misalnya 1 ke 2 ... 1 ke 2 ... 1 ke 2 saja banyak sekali bilangan2 yang e ..berada di antaranya yang tidak dapat ditentukan berapa banyak bilangan yang berada di antaranya, kemudian 2 ke 3 banyak juga bilangan-bilangan yang berada diantaranya sehingga tidak dapat ditentukan berapa banyak bilangan yang ada diantara bilangan 1 sampai bilangan 3.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek mampu menjawab dengan benar bahwa diantara bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 berhingga banyaknya bilangan tapi tidak mampu menjelaskan alasannya mengapa diantara bilangan-bilangan real dari 1 sampai 3 tidak berhingga banyaknya bilangan. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.3.1.1 dan S3.3.1.2] atas pertanyaan [P3.3.1.1 dan P3.3.1.2] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 3 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 3 adalah pemahaman instrumental.

Transkrip wawancara I nomor 4

- P3.4.1.1 : Pertanyaan nomor 4, apakah bilangan $2,32110111011101 \dots$ dan seterusnya adalah bilangan rasional atau bilangan irrasional?
- S3.4.1.1 : Bilangan rasional
- P3.4.1.2 : Mengapa anda mengatakan bilangan rasional
- S3.4.1.2 : Karena dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$
- P3.4.1.3 : Karena dapat dibentuk menjadi?
- S3.4.1.3 : menjadi $\frac{a}{b}$
- P3.4.1.4 : sedangkan di sini kan tidak ada yang mengatakan bahwa bentuk ini, ini kan tidak berbentuk $\frac{a}{b}$, kenapa anda mengatakan bahwa ini $\frac{a}{b}$?
- S3.4.1.4 : Dapat disederhanakan menjadi bentuk $\frac{a}{b}$, karna kita kembali ke pertanyaannya yaitu bilangan rasional atau bilangan irrasional sedangkan kita ketahui bahwa bilangan rasional adalah bilangan yang dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$
- P3.4.1.5 : Begitu? ulangi tadi ... ulangi?
- S3.4.1.5 : Karna $2, \dots$ karna bilangan $2, \dots$ karna bilangan $2,32110111011101 \dots$ e... dapat disederhanakan menjadi bilangan rasional sedangkan kita ketahui bahwa bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$, kita melihat angka yang berada di belakang koma ... angka di belakang koma ... e ... dari bilangan desimal ini yaitu beraturan maksudnya berulang yaitu $110111011101 \dots$ ini sudah berulang artinya dapat disederhanakan menjadi bilangan rasional
- P3.4.1.6 : bagaimana caranya anda menyederhanakan $2,32110111011101 \dots$ menjadi bilangan rasional?
- S3.4.1.6 : e... dimisalkan dulu x itu adalah bilangan ini (menunjuk $2,32110111011101 \dots$) bilangan yang berada pada soal yaitu $2,32110111011101 \dots$ kemudian e... dikalikan ... dikalikan ... apa ini ... satu dua tiga empat lima (menghitung angka dibelakang koma) berarti dikali dengan $10.000x$ (sambil mengerjakan soal tersebut) kemudian dikali lagi ... dimisalkan dulu $x = 2,32110111011101 \dots$ kemudian kita melihat e ... angka yang berulang, di mana letaknya angka yang berulang di belakang koma ... angka yang berulang di belakang koma itu ada 5 angka baru nilai... baru angkanya berulang sehingga dikali dengan $1000x$ setelah itu dikurangi lagi dengan ... dikurangi lagi dengan e ... dikalikan lagi berapa angka ... e berapa angka ... berapa angka agar bilangan itu ... e ... dap ... apa ... angka yang dibelakang koma berulang itu dapat sejajar sehingga apabila dikurangkan angka di belakang koma habis
- P3.4.1.7 : ya, coba dikerja dulu
- S3.4.1.7 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit)

- P3.4.1.8 : coba dilihat kembali apakah jawaban anda sudah betul, anda sudah yakin bahwa itu adalah jawaban yang betul, kalo sudah yakin saya akan bertanya lagi
- S3.4.1.8 : Yakinma
- P3.4.1.9 : Yakin?
- S3.4.1.9 : He em (mengiyakan)
- P3.4.1.10 : ... e ... menurut ujian tulisan anda yang lalu e ... yang 2,32110111011101 ...e ... yang anda tuliskan awalnya dikali dengan 100 juta
- S3.4.1.10 : Iye
- P3.4.1.11 : Sedangkan ujian tulisan anda yang lalu anda kali dengan 1 M ... 1 Milyar, seribu juta toh
- S3.4.1.11 : Iya
- P3.4.1.12 : Yang mana yang benar?
- S3.4.1.12 : 1000 juta atau ...
- P3.4.1.13 : 1000 juta ... 1000 ... 1000 juta nih satu dua tiga ... 9 nol-nya yang mana yang benar
- S3.4.1.13 : tunggu dulu kak (menghitung angka di belakang koma) satu dua tiga empat lima enam tujuh delapan sembilan ehm salah yang ini kak (sambil menunjuk ...) tunggu dulu ... satu dua tiga empat lima enam tujuh delapan sembilan ... 1000 juta
- P3.4.1.14 : mengapa anda bilang salah? Salah anunya yang tadi, salah pekerjaannya yang tadi?
- S3.4.1.14 : Karna angka yang berada di belakang 0 itu set ... agar ... agar angka yang berulang sejajar dengan yang di atas (nilai yang di atas) itu ada 9 angka sehingga harus dikalikan dengan 1000 juta
- P3.4.1.15 : 1000 juta?
- S3.4.1.15 : Iye
- P3.4.1.16 : Tapi tadi juga sejajar, kenapa bisa andapat hasilnya ...
- S3.4.1.16 : Tidak ... tidak sejajarki kak
- P3.4.1.17 : Tidak sejajar?
- S3.4.1.17 : Iye
- P3.4.1.18 : Ooh ..
- S3.4.1.18 : Tidak sejajarki tadi kak, satu dua tiga empat lima enam tujuh delapan sembilan... 9
- P3.4.1.19 : Jadi hasilnya?
- S3.4.1.19 : (Mengerjakan) hmmm salah ... 11-2 9 ... 9-3 .. 6 ... 10-2 ... 8 ...

$$\frac{2320869000}{999.900.000}$$
- P3.4.1.20 : (pewawancara melihat hasil pekerjaan subjek) eh menurut ujian tulisan anda yang lalu hasilnya $\frac{231878000}{999.900.000}$ sedangkan yang anda dapatkan sekarang $\frac{2320869000}{999.900.000}$, yang mana yang benar?

S3.4.1.20 : Yang ini yang benar kak (menunjuk $\frac{2320869000}{999.900.000}$)

P3.4.1.21 : Yang ini yang benar? (menunjuk $\frac{2320869000}{999.900.000}$)

S3.4.1.21 : salah di situ ... e ... salah pengurangannya 11-2 mestinya 9

P3.4.1.22 : He em trus?

S3.4.1.22 : 9-3 mestinya 6

P3.4.1.23 : Trus?

S3.4.1.23 : 10-2=8 terus di sini 1, di sini sudah dipinjam jadi di sini 0, turun 2-nya turun 3 ... turun 2

P3.4.1.24 : Jadi hasilnya?

S3.4.1.24 : $\frac{2320869000}{999.900.000}$

P3.4.1.25 : Jadi ini tadi salah?

S3.4.1.25 : Salah pengurangan

P3.4.1.26 : Salah pengurangan?

S3.4.1.26 : iya

P3.4.1.27 : e ... mengapa anda mencoret 3 angka 0 di belakang?

S3.4.1.27 : ... e ... karna kalo dibagi habiski kak

P3.4.1.28 : Kalo dibagi habis?

S3.4.1.28 : He em (mengiyakan), ini kan artinya e ... $\frac{2.320.869.000 \times 10^3}{999.900 \times 10^3}$, eh pangkat 3

P3.4.1.29 : Trus?

S3.4.1.29 : Eh ... apa di artinya 10^3 dibagi 10^3 kan 1

P3.4.1.30 : Iya

S3.4.1.30 : Jadi $\frac{2.320.869}{999.900} \times \frac{10^3}{10^3}$ artinya $\frac{2.320.869}{999.900} \times 1 = \frac{2.320.869}{999.900}$

P3.4.1.31 : ... e ... apakah ... jadi anda sudah dapatkan bentuknya $\frac{a}{b}$?

S3.4.1.31 : Iya

P3.4.1.32 : Apakah bentuk itu sudah sederhana?

S3.4.1.32 : Mmm ... (berpikir)

P3.4.1.33 : Sudah dalam bentuk pecahan paling sederhana?

S3.4.1.33 : Iya, sederhana

P3.4.1.34 : Mengapa bisa anda menyimpulkan sudah merupakan pecahan yang sederhana?

S3.4.1.34 : Karna angka yang berada di ujung pembilang ini adalah bilangan ganjil

P3.4.1.35 : Yaitu?

S3.4.1.35 : 9, sedangkan angka berada ... angka satuan yang paling ... yang paling ... yang paling ... di ujung ini pada pem ... penyebut bilangan genap ... ganjil ... genap sehingga ... tidak dapat disederhanakan

P3.4.1.36 : Sudah pasti?

S3.4.1.36 : Iya

P3.4.1.37 : Jika di atasnya (pembilang) eh ... jika pembilangnya ganjil di bawahnya genap sudah tidak bisa lagi disederhanakan?

S3.4.1.37 : Tidak bisa

P3.4.1.38 : Tidak bisa?

S3.4.1.38 : Iye

P3.4.1.39 : Contohnya? Contoh lain coba berikan contoh lain

S3.4.1.39 : Contohnya kalo misalnya $\frac{21}{8}$, ini (8) bisa dibagi 4, ini (21) tidak bisa dibagi 4

P3.4.1.40 : Tidak bisa dibagi 4 di'?

S3.4.1.40 : He em (mengiyakan)

P3.4.1.41 : Jadi berlaku juga untuk pecahan ... sudah didapatkan pecahan seperti itu? Jadi ini adalah pecahan yang paling sederhana?

S3.4.1.41 : Paling sederhana

P3.4.1.42 : Bentuk pecahan yang paling sederhana?

S3.4.1.42 : Iye

P3.4.1.43 : Jadi ... e ... tadi kembali ke soal bahwa 2,32110111011101 ... dan seterusnya itu?

S3.4.1.43 : Bilangan rasional

P3.4.1.44 : Adalah Bilangan rasional?

S3.4.1.44 : Iye, dapat dibuktikan bilangan 2,32110111011101 ... itu dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$

P3.4.1.45 : Dengan cara seperti ini?

S3.4.1.45 : Dengan cara seperti ini memisalkan

P3.4.1.46 : mengapa anda ... mengapa anda e ... mengapa anda membuktikan bahwa bilangan 2,32110111011101 ... dan seterusnya itu bilangan rasional dengan cara seperti ini (dengan cara memisalkan)?

S3.4.1.46 : Emmm... karna e ... kita ketahuu tadi bahwa apabila ada bilangan desimal yang ber ... angka di belakang komanya berulang itu dapat ... dapat disederhanakan menjadi bentuk $\frac{a}{b}$ e ... ya ... dengan cara e ... kan ini angkanya hanya ... bilangannya cuma 1 ... e jadi kalo mau disederhanakan itu dimisalkan dulu dengan x kemudian dikali e ... dengan bilangan ... bilangan ... untuk mempermudah bu

P3.4.1.47 : Untuk mempermudah?

S3.4.1.47 : He em

P3.4.1.48 : Diambil cara ini?

S3.4.1.48 : Iya

P3.4.1.49 : Jadi ada cara yang sulit?

S3.4.1.49 : Tidak adami

P3.4.1.50 : Jadi mengapa anda mengambil cara ini?

S3.4.1.50 : karna cara ini, cara yang bisa membuktikan apakah dia bilangan rasional atau tidak.

- P3.4.1.51 : maksud saya apa alasannya anda memakai cara ini? Mengapa ki ... mengapa anda pake ini se ... untuk membuktikan bahwa bilangan tadi adalah bilangan rasional?
- S3.4.1.51 : huh ... karna cara ini, karna baru cara ini yang saya tahu untuk membuktikan bilangan ini rasional atau tidak
- P3.4.1.52 : dimana anda tahu ... Dimana anda tahu cara ini? Di mana anda mendapatkan cara ini?
- S3.4.1.52 : pada saat ibu menjelaskan ...e ... menjelaskan Analisis Real I materi materi anali ... Analisis Real I untuk membuktikan suatu bilangan desimal apakah termasuk bilangan rasional atau bukan bilangan atau bilangan irrasional
- P3.4.1.53 : Tapi anda tidak tahu alasannya mengapa
- S3.4.1.53 : Tidak tahu
- P3.4.1.54 : Tidak tahu? Cuma mencontoh saja?
- S3.4.1.54 : iya

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek menjawab dengan benar soal tersebut dengan langkah-langkah yang tepat yaitu mengubah bentuk desimal berulang $2,32110111011101 \dots$ menjadi bentuk $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ dengan cara memisalkan $x = 2,32110111011101 \dots$, lalu mengalikannya dengan 100.000 dan 1.000.000.000 kemudian mengurangkannya sehingga angka dibelakang koma yang sama akan habis dan menghasilkan bentuk $\frac{a}{b}$, namun demikian, subjek belum dapat mengemukakan alasan mengapa memisalkan $x = 2,32110111011101 \dots$. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.4.1.1; S3.4.1.2; S3.4.1.4; S3.4.1.6; S3.4.1.10; S3.4.1.11; S3.4.1.12; S3.4.1.13; S3.4.1.14; S3.4.1.20; S3.4.1.124; S3.4.1.34; S3.4.1.35; S3.4.1.46; S3.4.1.50; S3.4.1.52 dan S3.4.1.53] atas pertanyaan [P3.4.1.1; P3.4.1.2; P3.4.1.4; P3.4.1.6; P3.4.1.10; P3.4.1.11; P3.4.1.12; P3.4.1.13; P3.4.1.14; P3.4.1.20; P3.4.1.124;

P3.4.1.34; P3.4.1.35; P3.4.1.46; P3.4.1.50; P3.4.1.52 dan P3.4.1.53] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 4 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 4 adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara I nomor 5

- P3.5.1.1 : ok, nomor 5, jumlah 2 bilangan irrasional adalah ... jadi 2 buah ... 2 bilangan irrasional adalah irrasional pula jika ya, berikan alasan! Jika tidak, berikan contoh, jadi ada 2 buah .. ada 2 bilangan irrasional toh, menghasilkan bilangan irrasional pula, apakah pernyataan ini ... jika ya, berikan alasan! Jika tidak, berikan contoh!
- S3.5.1.1 : ya, bilangan irrasional
- P3.5.1.2 : bilangan irrasional?
- S3.5.1.2 : he em
- P3.5.1.3 : apabila 2 buah bilangan irrasional dijumlahkan akan menghasilkan bilangan irrasional? Bagaimana dengan bilangan irrasional lainnya? Apakah tidak ada yang memenuhi?
- S3.5.1.3 : maksudnya tidak ada yang memenuhi?
- P3.5.1.4 : kan anda bilang tadi bahwa jumlah 2 bilangan irrasional adalah irrasional
- S3.5.1.4 : ya
- P3.5.1.5 : contohnya?
- S3.5.1.5 : $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ $2\sqrt{3}$
- P3.5.1.6 : saya tanya lagi, bagaimana dengan bilangan irrasional yang lain apakah tidak ada yang memenuhi?
- S3.5.1.6 : tidak ada
- P3.5.1.7 : tidak ada? Sampai situ saja?
- S3.5.1.7 : oh, tidak masih banyak
- P3.5.1.8 : masih banyak?
- S3.5.1.8 : masih banyak bilangan irrasional, misalnya $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ pasti $2\sqrt{2}$, $\sqrt{5} + \sqrt{5}$ $2\sqrt{5}$, $\sqrt{5} + \sqrt{5}$ $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5} + \sqrt{5}$ $4\sqrt{5}$, $7\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ $10\sqrt{2}$
- P3.5.1.9 : jadi kesimpulan anda jumlah 2 bilangan irrasional selalu bilangan irrasional
- S3.5.1.9 : iya selalu.
- P3.5.1.10 : selalu bilangan irrasional?

S3.5.1.10 : selalu

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek menjawab pertanyaan dengan salah bahwa jumlah dua bilangan irrasional selalu menghasilkan bilangan irrasional tanpa dapat menjelaskan alasannya, subjek hanya memberikan beberapa contoh dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua bilangan real. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.5.1.1; S3.5.1.5; S3.5.1.6; S3.5.1.8 dan S3.5.1.9] atas pertanyaan [P3.5.1.1; P3.5.1.5; P3.5.1.6; P3.5.1.8 dan P3.5.1.9] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 5 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga tidak dapat memberi contoh bahwa dengan menjumlahkan bilangan irrasional dengan inversnya pada penjumlahan bisa menghasilkan bilangan rasional yaitu 0. Dengan demikian, Subjek S3 tidak memahami konsep penjumlahan bilangan irrasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 6

P3.6.1.1 : ok, nomor 6 apakah hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah irrasional? Jika ya, berikan alasan! Jika tidak, berikan contoh!

S3.6.1.1 : tidak

P3.6.1.2 : tidak? Contoh?

S3.6.1.2 : contohnya $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ hasilnya 5, sedangkan 5 itu adalah bilangan rasional, karena merupakan bilangan bulat positif

P3.6.1.3 : masih ada contoh yang lain?

- S3.6.1.3 : $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 4 \times 3 = 12$ menghasilkan lagi sebuah bilangan rasional
- P3.6.1.4 : mengapa anda mengatakan bahwa $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ hasilnya = 5?
- S3.6.1.4 : karna akar ... akar itu merupakan pangkat $\frac{1}{2}$, jadi $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \dots$
- P3.6.1.5 : alasannya ... alasannya mengapa $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$?
- S3.6.1.5 : karna kita ketahu tadi $\sqrt{5}$, akar itu merupakan pangkat $\frac{1}{2}$, apabila disederhanakan ... disederhanakan ke bentuk pangkat
- P3.6.1.6 : ke bentuk pangkat?
- S3.6.1.6 : iya
- P3.6.1.7 : dari mana anda dapatkan kebentuk pangkat? Bisa dibentuk ke dalam bentuk pangkat dari akar ke dalam bentuk pangkat?
- S3.6.1.7 : pelajaran akar, pangkat dan logaritma
- P3.6.1.8 : akar, pangkat dan logaritma, pelajaran mana?
- S3.6.1.8 : pelajaran SMA kelas 1
- P3.6.1.9 : ini merupakan apa?
- S3.6.1.9 : e ... $\sqrt{5}$ itu merupakan pangkat eh pangkat ... merupakan akar
- P3.6.1.10 : iya ... iya maksud saya itukan di pelajaran SMA kelas 1, maksud saya alasannya $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, kenapa anda bisa mengatakan itu?
- S3.6.1.10 : karna kalo akar diubah menjadi bentuk pangkat nilai dari akar ini adalah pangkat $\frac{1}{2}$
- P3.6.1.11 : iya bisa diubah tapi mengapa bisa diubah?
- S3.6.1.11 : tidak tahu
- P3.6.1.12 : tidak tahu?
- S3.6.1.12 : iye
- P3.6.1.13 : tidak tahu mengapa diubah, ok trus tadi jalankan lagi
- S3.6.1.13 : $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$ artinya $5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$
- P3.6.1.14 : mengapa pangkatnya ditambah
- S3.6.1.14 : karna merupakan sebuah sifat pada pangkat ... sifat pada ... pangkat ... eh perkalian pangkat ... perkalian bilangan bulat yang berpangkat
- P3.6.1.15 : ulangi-ulangi
- S3.6.1.15 : karna merupakan sifat pada per pada bilangan perpangkatan
- P3.6.1.16 : ulangi-ulangi perbaiki kata-katanya
- S3.6.1.16 : karna merupakan sifat dari operasi perkalian pada bilangan yang berpangkat
- P3.6.1.17 : ok, trus
- S3.6.1.17 : sehingga 5 pangkat $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ yaitu 1 menghasilkan 5 pangkat 1 = 5

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real, Subjek S3 menjawab dengan benar bahwa tidak selalu hasil kali dari dua bilangan irrasional adalah irrasional dengan bukti counter example yaitu memberikan contoh penyangkal yaitu $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 5^1 = 5$, 5 adalah bilangan rasional dengan memberikan alasan bahwa dalam menyelesaikan soal tersebut digunakan sifat perpangkatan. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.6.1.1; S3.6.1.2; S3.6.1.5; S3.6.1.13; S3.6.1.14 dan S3.6.1.17] atas pertanyaan [P3.6.1.1; P3.6.1.2; P3.6.1.5; P3.6.1.13; P3.6.1.14; P3.6.1.17] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 6 pada materi jenis-jenis bilangan real di mana subjek memberikan bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga dapat memberi contoh bahwa dengan mengalikan dua bilangan irrasional yang sama berbentuk akar seperti pada contoh di atas bisa menghasilkan bilangan rasional maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada jawaban soal nomor 6 adalah pemahaman formal.

Transkrip wawancara I nomor 7

- P3.7.1.1 : ok, lanjut nomor 7 sekarang yah, apakah hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional?
 S3.7.1.1 : hasilbagi
 P3.7.1.2 : dua bilangan rasional adalah bilangan rasional? Berikan alasan!
 S3.7.1.2 : iya, bilangan rasional karna apabila bilangan rasional dibagi dengan bilangan rasional pasti mendapatkan bilangan rasional
 P3.7.1.3 : pasti mendapatkan bilangan rasional? secara umum apakah semua bilangan rasional dibagi dengan bilangan rasional untuk setiap

bilangan rasional dibagi dengan bilangan rasional pasti menghasilkan bilangan rasional?

S3.7.1.3 : iya, secara umum

P3.7.1.4 : secara umum?

S3.7.1.4 : iya

P3.7.1.5 : bagaimana dengan pembagian bilangan rasional lainnya? Masih adakah bilangan rasional dibagi dengan bilangan hasilnya bukan bilangan rasional? adakah hal yang demikian?

S3.7.1.5 : tidak ada

P3.7.1.6 : semuanya begitu? (menghasilkan bilangan rasional)

S3.7.1.6 : iya

P3.7.1.7 : contohnya?

S3.7.1.7 : contohnya kita ambil bilangan bulat negatif -2, bilangan bulat negatif yaitu negatif 2 dan bilangan bulat positif, bulat positif itu 3, dua bilangan rasional ini apabila dibagi -2 dibagi dengan 3 hasilnya $-2/3$ sedangkan yang kita ketahui $-2/3$ itu adalah bentuk pecahan, pecahan masuk pada bilangan rasional.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek menjawab dengan salah bahwa hasil bagi dari dua bilangan rasional adalah bilangan rasional, subjek tidak mampu memberikan alasan, subjek hanya mengambil beberapa contoh dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semua hasil pembagian bilangan rasional. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.7.1.2; S3.7.1.5 dan S3.7.1.7] atas pertanyaan [P3.7.1.2; P3.7.1.5 dan P3.7.1.7] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 7 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bukti melalui counter example (contoh penyangkal) sehingga tidak dapat memberi contoh bahwa bisa saja jika penyebutnya 0, 0 bilangan rasional maka hasilnya adalah tak terdefinisi dan syarat untuk mendapatkan bilangan rasional adalah $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Dengan

demikian, Subjek S3 tidak memahami konsep pembagian dua bilangan rasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 8

- P3.8.1.1 : iya, masuk ke nomor 8, jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, termasuk bilangan apakah hasil kali dari kedua bilangan tersebut?
- S3.8.1.1 : bilangan irrasional
- P3.8.1.2 : apa tadi?
- S3.8.1.2 : bilangan irrasional
- P3.8.1.3 : mengapa?
- S3.8.1.3 : karna apabila e ... misalnya e ... a itu adalah ... a diketahui bilangan bilangan rasional misalnya a kita ambil bilangan bulat positif 2, b adalah bilangan irrasional, kita ambil bilangan irrasionalnya adalah $\sqrt{3}$, 2 dikali $\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, kita ketahui bahwa $2\sqrt{3}$ adalah bilangan irrasional
- P3.8.1.4 : apakah tidak ada kemungkinan yang lain?
- S3.8.1.4 : tidak ada
- P3.8.1.5 : jadi berlaku secara umum? Jadi untuk setiap a bilangan rasional dikali dengan b bilangan irrasional, semua menghasilkan bilangan irrasional
- S3.8.1.5 : iya

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek menjawab dengan salah soal yang berbunyi jika a bilangan rasional dan b bilangan irrasional, maka hasil kali dari kedua bilangan tersebut adalah bilangan irrasional subjek tidak mampu memberikan alasan, subjek hanya mengambil beberapa contoh dan menganggap kalau contoh yang ia berikan berlaku untuk semuanya. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.8.1.1; S3.8.1.3 dan S3.8.1.4] atas pertanyaan [P3.8.1.1; P3.8.1.3 dan P3.8.1.4] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 8 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami bagaimana mengklasifikasikan perkalian dua bilangan yang menghasilkan bilangan rasional dan menghasilkan bilangan irrasional. Dengan demikian, Subjek S3 tidak memahami konsep perkalian bilangan rasional dengan bilangan irrasional, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 9

- P3.9.1.1 : nomor 9, Apakah $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$. Berikan alasan?
- S3.9.1.1 : iya, karna kita telah ketahui tadi pada bilangan yang berpangkat eh bilangan akar itu memiliki nilai pada ... eh memiliki sifat yang dapat diubah menjadi bentuk pangkat, jika akar diubah menjadi bentuk pangkat maka nilai pangkatnya adalah pangkat $\frac{1}{2}$ sedangkan yang kita ketahui tadi $\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}}$ sifat ... sifat pada bilangan berpangkat yang dipangkatkan itu pangkatnya dikalikan jadi $a^{2 \times \frac{1}{2}}$ jadi $a^1 = a$
- P3.9.1.2 : tadi mengapa anda mengerjakannya dari $\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}}$ diubah menjadi bentuk pangkat, mengapa anda mengerjakannya seperti itu?
- S3.9.1.2 : karna ...mmm ... karna yang menurut pemahaman saya untuk mempermudah e ... mengubahnya ke bentuk ...ke bentuk ... untuk mempermudah mendapatkannya menjadi a itu, mengubah bentuk akar menjadi bentuk pangkat
- P3.9.1.3 : apa alasannya diubah dari bentuk akar ke bentuk pangkat?
- S3.9.1.3 : emm ... karna sudah ada sifat ... sudah ada sifat yang membuktikan bahwa akar itu dapat diubah menjadi bentuk pangkat dengan nilainya , nilai pangkatnya itu $\frac{1}{2}$
- P3.9.1.4 : sifat?
- S3.9.1.4 : sifat atau aksioma ... aksioma
- P3.9.1.5 : aksioma, bunyinya bagaimana?
- S3.9.1.5 : tidak tahu kak
- P3.9.1.6 : tidak tahu?
- S3.9.1.6 : iye
- P3.9.1.7 : jadi ini anda ubah bentuk akar menjadi bentuk pangkat itu alasannya karna apa?

- S3.9.1.7 : apa di' aksioma (ragu-ragu)
 P3.9.1.8 : aksioma? Begitu?
 S3.9.1.8 : iya kayaknya
 P3.9.1.9 : aksioma pada? Apa itu aksioma?
 S3.9.1.9 : e ... suatu ketentuan yang e... sudah diakui kebenarannya yang tidak bisa dibuk... ti...kan ... apa yang tidak usah dibuktikan lagi.
 P3.9.1.10 : e.. tadi kan anda menyebutkan ada 2, tadi pertamanya bilang sifat, yang kedua bilang aksioma, yang mana yang benar?
 S3.9.1.10 : hmmm ... (sambil senyum-senyum) tidak kutaui kak
 P3.9.1.11 : tidak tau yang mana?
 S3.9.1.11 : tidak tau yang mana

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek menjawab dengan salah bahwa $\sqrt{a^2} = a, \forall a \in \mathbb{R}$ didapatkan dengan menggunakan sifat eksponen yaitu mengubah bentuk akar ke bentuk pangkat kemudian mengalikan pangkat dengan pangkat, namun hasil tersebut mestinya $\sqrt{a^2} = a$, untuk $a > 0$, dan $\sqrt{a^2} = -a$ untuk $a < 0$ karena akar dari suatu bilangan positif haruslah positif. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.9.1.1 dan S3.9.1.3] atas pertanyaan [P3.9.1.1 dan P3.9.1.3] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 9 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami bahwa $\sqrt{a^2}$ adalah nilai mutlak dari $|a|, \forall a \in \mathbb{R}$, melalui suatu pembuktian dengan menggunakan definisi nilai mutlak. Dengan demikian, Subjek S3 tidak memahami konsep pembuktian dengan menggunakan definisi nilai mutlak, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

Transkrip wawancara I nomor 10

- P3.10.1.1 : nomor 10, untuk bilangan real a yang mana saja, nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$)? Jadi anda mencari bilangan real a yang mana saja yang memenuhi dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$?
- S3.10.1.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit) sudahmi kak, untuk bilangan real yang memenuhi nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ yaitu semua bilangan bulat positif mulai dari 2 dan seterusnya
- P3.10.1.2 : mulai dari 2 dan seterusnya?
- S3.10.1.2 : iye
- P3.10.1.3 : hanya bilangan bulat positif yang dimulai dari 2 saja yang memenuhi?
- S3.10.1.3 : iye
- P3.10.1.4 : saya tanya dulu mengapa anda memulai dari 2
- S3.10.1.4 : karna apabila e ... angka 0 masuk , 0 masuk, dia sama dengan, kalo 1 ... $\frac{1}{2}$ itu ... eh astaga ... cocokmi, kalo dia 1, kalo dia $1, \frac{1}{2}$ itu lebih ... sebenarnya kalo a-nya misalkan $1 - \frac{1}{2}$ itu lebih daripada pada $\frac{1}{3}$, jadi untuk angka 1 tidak masuk pada ... pada ini $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$
- P3.10.1.5 : jadi 1 tadi tidak diambil?
- S3.10.1.5 : tidak
- P3.10.1.6 : kalo 0?
- S3.10.1.6 : 0 masuk
- P3.10.1.7 : 0 masuk, 1 tidak masuk, 2?
- S3.10.1.7 : masuk
- P3.10.1.8 : apakah ... tadi kan dibilang mulai dari 2
- S3.10.1.8 : salahi itu kak masukki
- P3.10.1.9 : salah? Jadi yang mana jawaban anda yang paling tepat?
- S3.10.1.9 : emmm yang mana ini untuk bilangan real a yang memenuhi nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ yaitu 0 dan semua bilangan bulat positif yang dimulai dari 2 sampai seterusnya
- P3.10.1.10 : iya, intinya di sini bilangan bulat positif pada umumnya?
- S3.10.1.10 : iya
- P3.10.1.11 : tidak adakah bilangan yang lain selain bilangan bulat positif
- S3.10.1.11 : tidak ada
- P3.10.1.12 : tidak ada?
- S3.10.1.12 : iye

- P3.10.1.13 : mengapa anda mesti bilang tidak ada?
- S3.10.1.13 : karna kalo bilangan bulat negatif itu jelas tidak termasuk karna misalnya dimisalkan a-nya -1 untuk $\frac{1}{2}a^2$ itu hasilnya positif sedangkan $\frac{1}{3}a^3$ hasilnya negatif berarti $\frac{1}{3}a^3$ itu lebih kecil daripada $\frac{1}{2}a^2$, sedangkan pada bentuk pecahan dimisalkan kita ambil $a = \frac{1}{2}$ e... mendapatkan hasil $\frac{1}{8}$ e .. pada $\frac{1}{2}a^2$ mendapatkan hasil $\frac{1}{8}$ e ... pada $\frac{1}{3}a^3$ mendapatkan hasil $\frac{1}{24}$ jadi nilai pada $\frac{1}{2}a^2$ lebih besar daripada nilai $\frac{1}{3}a^3$, jadi tidak terbukti bahwa masuk pada soal ini
- P3.10.1.14 : bahwa apa yang masuk?
- S3.10.1.14 : bahwa $\frac{1}{2}a^2$ lebih kecil atau sama dengan $\frac{1}{3}a^3$
- P3.10.1.15 : maksudnya apa yang masuk, bilangan apa yang tidak masuk?
- S3.10.1.15 : bilangan pecahan tidak termasuk
- P3.10.1.16 : untuk semua bilangan pecahan?
- S3.10.1.16 : iya
- P3.10.1.17 : mengapa anda langsung mengatakan bahwa iya
- S3.10.1.17 : iya
- P3.10.1.18 : mengapa anda ...
- S3.10.1.18 : karna emmm ... walaupun, karna sudah terbukti bahwa kita ambil satu nilai pecahan ini tidak ... apa ... tidak terbukti ... karna kita mengambil contoh salah satu bilangan pecahan mmm... untuk nilai a-nya, tidak terbukti bahwa $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$
- P3.10.1.19 : seperti itu?
- S3.10.1.19 : iye
- P3.10.1.20 : kan, di sini tadi anda mengatakan bilangan bulat positif saja yang memenuhi dimulai dari 0 masuk, 2 ... bilangan 2 dan seterusnya, masih adakah bilangan yang lain, selain bilangan bulat positif
- S3.10.1.20 : bilangan ... bilangan genap positif
- P3.10.1.21 : genap positif?
- S3.10.1.21 : iya
- P3.10.1.22 : yang dimulai dari
- S3.10.1.22 : 2
- P3.10.1.23 : yang dimulai dari 2?
- S3.10.1.23 : eh 0, 0 sampai seterusnya
- P3.10.1.24 : kan coba anda lihat kembali soalnya untuk bilangan real a yang mana saja, nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ kurang dari $\frac{1}{3}a^3$
- S3.10.1.24 : 0

- P3.10.1.25 : bilangan real a yang mana saja, nilai dari $\frac{1}{2}a^2$
- S3.10.1.25 : (berpikir berapa menit) bilangan asli dimulai dari 2, e ... kemudian bilangan cacah ... e ...0 eh bilangan cacah kecuali 1 kemudian bilangan bilangan prima kecuali sa, bilangan prima masuk. 2 dan seterusnya, bilangan komposit ... iya bilangan komposit kecuali 1, bilangan1 tidak, bilangan 0
- P3.10.1.26 : jadi itu kesimpulannya... ulangi kesimpulan anda apa?
- S3.10.1.26 : bilangan real yaitu bilangan bulat positif, dimulai dari 2 dengan 0, bilangan 0 dan bilangan bulat positif yang dimulai dari 2, kemudian bilangan cacah kecuali 1, kemudian bilangan prima masuk, bilangan genap, bilangan bulat genap, kemudian bilangan ganjil kecuali 1, bilangan komposit, bilangan 0.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek menjawab dengan benar namun belum lengkap bahwa nilai dari $\frac{1}{2}a^2$ tidak lebih besar daripada $\frac{1}{3}a^3$ ($\frac{1}{2}a^2 \leq \frac{1}{3}a^3$) adalah $a \geq 2$ atau $a = 0 \forall a \in \mathbb{R}$, dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai a satu persatu ke dalam pertidaksamaan di atas. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.10.1.1; S3.10.1.4; S3.10.9; S3.10.1.11 dan S3.10.1.13] atas pertanyaan [P3.10.1.1; P3.10.1.4; P3.10.9; P3.10.1.11 dan P3.10.1.13] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 10 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek pada jawaban soal nomor 10 adalah pemahaman instrumental.

Transkrip wawancara I nomor 11

- P3.11.1.1 : lanjut nomor 11, apakah kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu?
- S3.11.1.1 : tunggu dulu kak kukerjaki (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit)
- P3.11.1.2 : apakah kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu?

S3.11.1.2 : tidak selalu
 P3.11.1.3 : tidak selalu?
 S3.11.1.3 : iya
 P3.11.1.4 : mengapa?
 S3.11.1.4 : karena pada bentuk pecahan $e \dots$ kuadrat $e \dots$ kuadrat dari suatu bilangan pecahan $e \dots$ tidak lebih besar atau sama dengan bilangan real itu
 P3.11.1.5 : jadi un \dots $e \dots$ apakah semua pecahan tidak berlaku
 S3.11.1.5 : ya semua pecahan
 P3.11.1.6 : tidak berlaku kuadrat bilangan pecahan selalu lebih besar atau sama dengan bilangan pecahan itu sendiri
 S3.11.1.6 : eh tidak,
 P3.11.1.7 : tidak?
 S3.11.1.7 : ya, pada pecahan negatif $e \dots$ selalu lebih besar atau sama dengan bilangan pecahan itu
 P3.11.1.8 : pada pecahan negatif?
 S3.11.1.8 : iya
 P3.11.1.9 : selalu?
 S3.11.1.9 : lebih besar atau sama dengan bilangan real itu sedangkan pada pecahan positif $e \dots$ dia lebih kecil dari bilangan itu sendiri
 P3.11.1.10 : ya, tadi kan dibahas pecahan
 S3.11.1.10 : iya
 P3.11.1.11 : tidak adakah bilangan yang lain yang memenuhi atau tidak memenuhi dari kuadrat \dots dari soal no 11
 S3.11.1.11 : tidak ada, hanya bilangan pecahan yang tidak memenuhi
 P3.11.1.12 : bilangan pecahan?
 S3.11.1.12 : iye, pecahan negatif yang tidak memenuhi eh \dots pecahan positif yang tidak memenuhi $e \dots$ bilangan real selalu lebih besar atau samaa dengan bilangan real itu.
 P3.11.1.13 : jadi selain bilangan pecahan itu kenapa?
 S3.11.1.13 : memenuhi $e \dots$
 P3.11.1.14 : selain bilangan pecahan?
 S3.11.1.14 : iya, selain bilangan pecahan positif memenuhi kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu
 P3.11.1.15 : coba-coba ulangi tadi no 11
 S3.11.1.15 : selain dari bilangan pecahan positif memenuhi kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu
 P3.11.1.16 : hanya bilangan pecahan saja?
 S3.11.1.16 : iya
 P3.11.1.17 : tidak ada yang bilangan lain?
 S3.11.1.17 : oh real \dots astagfirullah \dots bilangan irrasional (sambil berbisik) iya ituji kak
 P3.11.1.18 : hanya bilangan pecahan saja?

- S3.11.1.18 : iya
P3.11.1.19 : yang tidak memenuhi yah?
S3.11.1.19 : iya
P3.11.1.20 : itupun bilangan pecahan?
S3.11.1.20 : positif yang tidak memenuhi
P3.11.1.21 : yang tidak memenuhi?
S3.11.1.21 : iya
P3.11.1.22 : mengapa bilangan yang lain tidak memenuhi, jenis bilangan yang lain tidak memenuhi,
S3.11.1.22 : maksudnya?
P3.11.1.23 : mengapa jenis bilangan yang lain tidak memenuhi? Hanya bilangan pecahan saja yang anda bilang memenuhi ?
S3.11.1.23 : hae salah kak, terbalikki, hanya bilangan pecahan positif yang tidak memenuhi, yang lain memenuhi
P3.11.1.24 : ooh ... hanya bilangan pecahan positif yang tidak memenuhi
S3.11.1.24 : hanya bilangan pecahan positif yang tidak memenuhi kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real itu
P3.11.1.25 : oh ya ... ya, di sini diujian tulisan anda dia bilang hampir sama dengan pernyataan anda tadi tidak berlaku secara umum karna untuk bilangan pecahan tidak berlaku kuadrat bilangan pecahan selalu lebih besar atau sama dengan bilangan pecahan itu sendiri, jadi dia di sini hanya mengatakan bilangan pecahan, anda mengatakan bilangan pecahan positif, jadi yang mana ...?
S3.11.1.25 : lebih spesifik kak bilangan pecahan positif karna apabila $-\frac{1}{2}$ dipangkatduakan dia menghasilkan $\frac{1}{4}$ artinya hasilnya itu lebih besar dari bilangan real itu yang dikuadratkan jadi e ... yang tepatnya itu kecuali bilangan pecahan positif

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek menjawab dengan benar bahwa kuadrat dari suatu bilangan real selalu lebih besar atau sama dengan bilangan real dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai satu persatu ke dalam pertidaksamaan tersebut sehingga memenuhi pertidaksamaan itu namun belum dapat menyelesaikan soal dengan mencari himpunan penyelesaian kedalam bentuk pertidaksamaan dan tidak dapat

mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku pada soal. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.11.1.2; S3.11.1.4 dan S3.11.1.25] atas pertanyaan [P3.11.1.2; P3.11.1.4 dan P3.11.1.25] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 11 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek pada soal nomor 11 adalah pemahaman instrumental.

Transkrip wawancara I nomor 12

- P3.12.1.1 : ok nomor 12, apakah akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu?
- S3.12.1.1 : akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu , iya
- P3.12.1.2 : apakah akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu
- S3.12.1.2 : tidak
- P3.12.1.3 : tidak, mengapa?
- S3.12.1.3 : karna pada pecahan e ... pecahan positif yang diakarkan hasilnya lebih besar daripada bilangan itu
- P3.12.1.4 : ulangi ... ulangi
- S3.12.1.4 : tidak ... eh apa suatu bilangan real positif tidak selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu apabila diakarkan karna pada bentuk pecahan suatu bilangan real diakarkan menghasilkan e ... bilangan real lebih besar dari bilangan yang diakarkan
- P3.12.1.5 : hanya untuk bilangan?
- S3.12.1.5 : pecahan
- P3.12.1.6 : pecahan saja?
- S3.12.1.6 : iya
- P3.12.1.7 : hanya untuk bilangan pecahan saja?
- S3.12.1.7 : iya
- P3.12.1.8 : untuk bilangan yang lain? Bagaimana dengan bilangan yang lain?
- S3.12.1.8 : tidak ada, karna real positif saja toh kak
- P3.12.1.9 : iya, maksud saya suatu bilangan real positif yang lain?
- S3.12.1.9 : tidak ada
- P3.12.1.10 : tidak ada?
- S3.12.1.10 : iye, hanya pecahan
- P3.12.1.11 : hanya pecahan?

- S3.12.1.11 : yang tidak memenuhi ... eh ... apa hanya bilangan pecahan apabila diakarkan menghasilkan lebih besar atau sama dengan bilangan yang diakarkan
- P3.12.1.12 : jadi saya ulangi nah, jawab langsung secara jelas, apakah akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu?
- S3.12.1.12 : tidak selalu, karna pada bilangan real pecahan positif apabila diakarkan menghasilkan bilangan pecahan yang lebih besar dari bilangan itu.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek menjawab dengan benar bahwa akar dari suatu bilangan real positif tidak selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu dengan memberikan contoh penyangkal dan bisa mengklasifikasikan mana contoh yang berlaku dan mana contoh yang tidak berlaku pada soal di atas. Subjek menjawab dengan benar bahwa akar dari suatu bilangan real positif selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan itu dengan cara mencoba-coba memasukkan nilai satu persatu ke dalam pertidaksamaan tersebut sehingga memenuhi pertidaksamaan itu namun belum dapat menyelesaikan soal dengan mencari himpunan penyelesaian kedalam bentuk pertidaksamaan dan tidak dapat mengklasifikasikan himpunan penyelesaian yang berlaku dan tidak berlaku pada soal. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.12.1.2; S3.12.1.4; S3.12.1.5 dan S3.12.1.12] atas pertanyaan [P3.12.1.2; P3.12.1.4; P3.12.1.5 dan P3.12.1.12] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 12 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Aljabar pada Bilangan Real.**

Transkrip wawancara 2 nomor 13

- P3.13.2.1 : wawancara kedua, buktikan bahwa jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $-(a + b) = (-a) + (-b)$!
- S3.13.2.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit) sesuai dengan definisi $a(-1) = -a$ maka $-(a + b)$ kita ubah dulu bentuknya menjadi $-1(a + b)$ artinya bentuk $-(a + b)$ bentuknya sama ketika $-1(a + b)$
- P3.13.2.2 : alasannya?
- S3.13.2.2 : alasannya saya tidak tahu, pernah saya dapatkan bentuk seperti ini diubah menjadi ... pernah saya dapatkan ketika $-a$ itu bisa diubah bentuknya menjadi $1(-a)$
- P3.13.2.3 : trus ini bagaimana, trus yang di atas sesuai definisi ini untuk apa?
- S3.13.2.3 : ini definisi untuk mendapatkan ... jangan dulu kak untuk mendapatkan nanti ... e ... $(-a) + (-b)$
- P3.13.2.4 : oh begitu?
- S3.13.2.4 : iya, misalkan eh janganmi a , misal itu ... e ... ketika ... e ... (-2) bisa saya ubah bentuknya ketika $(-1) \cdot 2 = -2$
- P3.13.2.5 : jadi dari $-(a + b) = -1(a + b)$? alasannya?
- S3.13.2.5 : tidak kutauki kak
- P3.13.2.6 : tidak ditau?
- S3.13.2.6 : iye
- P3.13.2.7 : lanjut
- S3.13.2.7 : kemudian ... e ... ini kita gunakan sifat distributif ... eh sifat ... e ... aksioma ... distributif
- P3.13.2.8 : yang dibagian mana digunakan aksioma distributif, bagian yang ini atau di bawahnya (sambil menunjuk)
- S3.13.2.8 : yang ini dikalikan, oh yang kena
- P3.13.2.9 : yang mana yang kena di situ? Yang mana yang jawabannya?
- S3.13.2.9 : oh jawaban dari eh aksioma distributif ini $-1(a) + -1(b)$
- P3.13.2.10 : jadi ini $-1(a) + -1(b)$, alasannya kenapa bisa dari $-1(a + b)$ ke $-1(a) + -1(b)$, apa alasannya dari sini ke sini?
- S3.13.2.10 : e ... digunakan distributif perkalian terhadap penjumlahan .
- P3.13.2.11 : perkalian terhadap penjumlahan?
- S3.13.2.11 : iye
- P3.13.2.12 : ok trus
- S3.13.2.12 : sehingga ini sama ... sesuai dengan ... sesuai dengan definisi yang ada $a(-1) = -a$ ini komutatif $(-1)a = a(-1) + b(-1)$... a eh ... $(-1)a$ komutatif dengan $a(-1)$, e ... $(-1)b$ komutatif dengan

- $b(-1)$, sehingga sesuai definisi tadi $a(-1) = -a \dots a(-1) = -a + b(-1) \dots -b$
- P3.13.2.13 : apakah bisa juga langsung dari sini ke sini dari $(-1)a = -a$, bisa begitu?
- S3.13.2.13 : bisa
- P3.13.2.14 : bisa?
- S3.13.2.14 : iya
- P3.13.2.15 : bisa langsung yah
- S3.13.2.15 : bisa langsung
- P3.13.2.16 : (pewawancara membaca kembali ujian tulisan subjek 3 dan menanyakannya) e ... menurut ujian tulisan yang lalu, kan anda tadi bilang sesuai definisi $a(-1) = -a$, sedangkan di sini sesuai teorema, yang mana yang benar?
- S3.13.2.16 : oh ... (heran) iya astagfirullah teorema kak
- P3.13.2.17 : teorema?
- S3.13.2.17 : iya, bukan definisi
- P3.13.2.18 : mengapa anda yakin bahwa itu teorema?
- S3.13.2.18 : eh ... pernah dibuktikan
- P3.13.2.19 : pernah dibuktikan?
- S3.13.2.19 : iya pernah dibuktikan bahwa $a(-1) = -a$
- P3.13.2.20 : apa bedanya dengan definisi
- S3.13.2.20 : e ... bedanya itu kalo teorema itu harus dibuktikan, kalo definisi itu ... biasanya ... e ... tidak kutau definisi kak, kalo teorema harus dibuktikan
- P3.13.2.21 : iya

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 menjawab dengan benar dengan alasan yang tepat menggunakan teorema $-1(a) = (-a)$ namun subjek tidak memisalkan $a + b$, tapi langkah yang diambil kurang tepat karna langsung saja menyamakan/mengadaptasi bentuk antara $-1(a) = (-a)$ dengan $-(a + b) = -1(a + b)$ tanpa memisalkan $a + b = x$ terlebih dahulu. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.13.2.1; S3.13.2.2; S3.13.2.5; S3.13.2.10; S3.13.2.12; S3.13.2.16; S3.13.2.17; S3.13.2.18 dan

S3.13.2.20] atas pertanyaan [P3.13.2.1; P3.13.2.2; P3.13.2.5; P3.13.2.10; P3.13.2.12; P3.13.2.16; P3.13.2.17; P3.13.2.18 dan P3.13.2.20] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 13 pada materi sifat aljabar pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 2 nomor 14

- P3.14.2.1 : tentukan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan berikut melalui langkah-langkah yang disertai alasan, mengapa langkah itu ditempuh (alasan nya dapat berupa aksioma, sifat, definisi atau teorema yang sesuai), soalnya adalah $3\left(2x + \frac{1}{3}\right) = 4\left(3x - \frac{1}{2}\right)!$
- S3.14.2.1 : huh (capek) ini ke sini, ... e ... langkah pertama kita gunakan distributif perkalian kemudian mendapatkan hasil $6x + 3\left(\frac{1}{3}\right) \dots$
- P3.14.2.2 : tunggu dulu alasan pertama distributif perkalian? Hanya itu saja?
- S3.14.2.2 : untuk ...
- P3.14.2.3 : tunggu dulu distributif perkalian, coba liat baik-baik, distributif perkalian, adakah ... apa ini?
- S3.14.2.3 : oh aksioma
- P3.14.2.4 : aksioma distributif perkalian? adakah kata seperti ini saja? aksioma distributif perkalian?
- S3.14.2.4 : perkalian terhadap penjumlahan
- P3.14.2.5 : iya, harus dikasi jelas alasan nya yah, ... diperjelas alasan nya
- S3.14.2.5 : aksioma distributif perkalian terhadap penjumlahan
 $3 \cdot (2x)$ itu $6x \dots 3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \dots 4 \cdot (3x)$ itu $= 2x$
- P3.14.2.6 : $12x$
- S3.14.2.6 : ya, $12x$, $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 2$, untuk kita selesaikan dulu yang ini mempunyai
 $3 \cdot \frac{1}{3}$ itu aksioma invers perkalian $3 \cdot \frac{1}{3}$ itu aksioma invers perkalian jadi didapatkan $6x + 1 = 12x - 2$
- P3.14.2.7 : apa maksud nya invers perkalian? Sudah cocok itu? Aksioma invers perkalian?
- S3.14.2.7 : iya
- P3.14.2.8 : ya terus lanjut
- S3.14.2.8 : kemudian didapatkan hasil $6x + 1 = 12x - 2$ kedua ruas ditambah dengan $-12x$

- P3.14.2.9 : e ini alasannya kedua ruas ditambah dengan $-12x$, masuk apa?
- S3.14.2.9 : sifat penjumlahan pada bilangan real
- P3.14.2.10 : sifat penjumlahan pada bilangan real, ya?
- S3.14.2.10 : iye
- P3.14.2.11 : ok trus
- S3.14.2.11 : jadi $(-12x) + 6x + 1 = (-12x) + 12x - 2$, mmm ... kemudian kita ...
- P3.14.2.12 : tunggu dulu, saya tanya dulu ini yang mana dalam kurungnya ini ditetapkan ... yang mana?
- S3.14.2.12 : (menulis)
- P3.14.2.13 : ya, supaya jelas
- S3.14.2.13 : kita gunakan sifat asosiatif pada aksioma asosiatif pada penjumlahan mmm ... jadi $(-12x) + 6x + 1 = (-12x) + 12x + (-2)$, trus kemudian ini $(-12x) + 6x$ itu hasilnya $(-12x) + 1$... $(-12x) + 12x$ itu merupakan invers
- P3.14.2.14 : tunggu dulu, liat baik-baik dulu itu angkanya
- S3.14.2.14 : eh salah, $-6x + 1$ kemudian ini $(-12x) + 12x$ itu merupakan aksioma ... e ... invers pada penjumlahan sehingga didapatkan $0 + (-2)$, 0 itu ditambah -2 hasilnya ... eh ... merupakan aksioma identitas pada penjumlahan jadi $-6x + 1 = -2$ kembali lagi pada sifat penjumlahan pada bilangan real kedua ruas ditambah dengan (-1) ... $-6x + 1 + (-1) = (-2) + (-1)$ pada ruas kiri gunakan e ... aksioma distributif pada eh distributif, asosiatif pada penjumlahan $-6x + 1 + (-1) = -3$ artinya ini $1 + (-1)$ itu merupakan aksioma invers pada penjumlahan $1 + (-1) \dots 0 = \dots -3$
- P3.14.2.15 : di bawah saja terus
- S3.14.2.15 : $-6x + 0$ itu merupakan aksioma ... merupakan aksioma identitas pada penjumlahan jadi $-6x + 0 = -6x = -3$ kedua ... eh kembali lagi kepada sifat perkalian pada bilangan real yaitu kedua ruas dikali dengan $-\frac{1}{6}$ yaitu ...
- P3.14.2.16 : mengapa dikali dengan $-\frac{1}{6}$ de?
- S3.14.2.16 : agar mendapatkan nilai x , karna di sini $-6x = -3$, jadi untuk mendapatkan nilai x -nya maka kita kali dengan inversnya
- P3.14.2.17 : apanya yang dikali itu?
- S3.14.2.17 : ... e ... ini apa ini namanya koefisiennya dikali dengan inversnya $-6x$ dikali dengan $(-\frac{1}{6}) = -3 \cdot (-\frac{1}{6})$, jadi kita dapatkan $x = \dots$
- P3.14.2.18 : apakah langsung,
- S3.14.2.18 : oh iya tidak ... e ... ini komutatif ... eh aksioma asosiatif pada perkalian, kuubahmi ini kak deh $(-\frac{1}{6}) \cdot (-6)$ (sambil menulis)

P3.14.2.19 : trus

S3.14.2.19 : ini (-6) dikali dengan (-6x) kita gunakan lagi aksioma asosiatif pada perkalian, jadi $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-6) \cdot x = -\frac{3}{6}$

P3.14.2.20 : saya tanya dulu $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-3)$, kenapa tiba-tiba menjadi $\frac{3}{6}$

S3.14.2.20 : negatif kali negatif positif

P3.14.2.21 : di mana anda dapat itu?

S3.14.2.21 : tidak kutaui kak, pelajaran SMA eh SMP

P3.14.2.22 : SMP?

S3.14.2.22 : SMP kelas 1

P3.14.2.23 : kelas 1? Apa materinya?

S3.14.2.23 : bilangan bulat

P3.14.2.24 : bilangan bulat saja?apanya bilangan bulat?

S3.14.2.24 : bukan bilangan bulat ... bulat positif ... negatif

P3.14.2.25 : begitu saja alasannya? kalo dilihat dari yang sudah dipelajari, apakah ada alasan yang lebih ...

S3.14.2.25 : ada

P3.14.2.26 : apa itu? Apakah ada alasan yang lebih mengenai?

S3.14.2.26 : teorema kayaknya kak

P3.14.2.27 : teorema apa, apa isinya?

S3.14.2.27 : $(-a) \cdot (-1) = a$

P3.14.2.28 : adakah begitu? $(-a) \cdot (-1) = a$

S3.14.2.28 : iye

P3.14.2.29 : adakah begitu saya tanya dulu

S3.14.2.29 : eh bukan, salah $-(-a) = a$

P3.14.2.30 : ini kan bukan negatif kali negatif, ini dia punya masing-masing nilai negatif, negatif 3 dikali negatif $\frac{1}{6}$

S3.14.2.30 : iye

P3.14.2.31 : bukan negatif dikali dengan satu bilangan saja

S3.14.2.31 : inikan samaji kak toh kalo negatif 1 dikali dengan negatif a = a

P3.14.2.32 : seperti itu?

S3.14.2.32 : iye, selebihnya tidak kutaumi kak $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-3)$

P3.14.2.33 : ini kan hanya satu bilangan toh, ini 2 bilangan

S3.14.2.33 : tidak kutau kak

P3.14.2.34 : ok, trus lanjut

S3.14.2.34 : dapatmi $\frac{3}{6}$... eh ... manami lagi itu ... ini aksioma $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-6)$ aksioma invers pada perkalian sehingga dapat $1 \cdot x = \left(\frac{3}{6}\right)$, $1 \cdot x$ merupakan iden ...aksioma identitas pada perkalian sehingga $x = \frac{3}{6}$

- P3.14.2.35 : $\frac{3}{6}$ atau masih bisa disederhanakan
- S3.14.2.35 : bisa disederhanakan $x = \frac{1}{2}$
- P3.14.2.36 : ya, kembali tadi, kan iya betul aksioma invers pada perkalian $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-6)$ tapi kan ada negatifnya
- S3.14.2.36 : iya
- P3.14.2.37 : $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-6)$, kenapa langsung hasilnya anda mengatakan 1?
- S3.14.2.37 : karena invers perkalian dari (-6) itu $\left(-\frac{1}{6}\right)$
- P3.14.2.38 : ya begitu?
- S3.14.2.38 : ya begitu kak
- P3.14.2.39 : apa bunyinya invers pada perkalian kah?
- S3.14.2.39 : eh bilangan yang dikalikan dengan inversnya hasilnya adalah identitas dari bilangan itu

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek menjawab dengan benar dengan langkah-langkah yang tepat tapi ada langkah-langkah yang alasannya tidak tepat

- Pada langkah dimana $-\frac{1}{6}(-3) = \frac{3}{6}$ subjek mengatakan bahwa adanya aturan perkalian tanda yaitu negatif kali negatif hasilnya positif, subjek mengatakan bahwa ada teorema yang mendukung yaitu $(-a)(-1) = a$ atau $-(-a) = a$

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.14.2.1; S3.14.2.4; S3.14.2.5; S3.14.2.6; S3.14.2.8; S3.14.2.9; S3.14.2.13; S3.14.2.14; S3.14.2.15; S3.14.2.16; S3.14.2.17; S3.14.2.18; S3.14.2.19; S3.14.2.20; S3.14.2.26; S3.14.2.27; S3.14.2.29; S3.14.2.32; S3.14.2.34; S3.14.2.37 dan S3.14.2.39] atas pertanyaan [P3.14.2.1; P3.14.2.4; P3.14.2.5; P3.14.2.6; P3.14.2.8; P3.14.2.9; P3.14.2.13; P3.14.2.14; P3.14.2.15; P3.14.2.16; P3.14.2.17; P3.14.2.18; P3.14.2.19; P3.14.2.20; P3.14.2.26;

P3.14.2.27; P3.14.2.29; P3.14.2.32; P3.14.2.34; P3.14.2.37 dan P3.14.2.39] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 14 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

- **Pemahaman terhadap Materi Pembuktian Bilangan Rasional**

Transkrip wawancara 3 nomor 15

- P3.15.3.1 : ok kita mulai wawancara ketiga yaitu buktikan bahwa akar dari ... $\sqrt{21}$ bukan bilangan rasional?
- S3.15.3.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit)
- P3.15.3.2 : ya jawabannya pertama-tama anda bagaimana?
- S3.15.3.2 : pertama-tama melihat definisi bilangan rasional yaitu bilangan yang dapat dibentuk menjadi $\frac{a}{b}$, kemudian memisalkan ... e ... $\sqrt{21}$ itu dengan t , $t = \sqrt{21}$ sehingga e ... ben ... kira-kira bilangan rasional itu bentuknya $\frac{a}{b}$, sehingga $t = \frac{a}{b}$
- P3.15.3.3 : ya, tunggu dulu yang saya mau tanyakan, mengapa Anda memisalkan $t = \sqrt{21}$?
- S3.15.3.3 : e ... karna ... e ... karna selanjutnya saya akan ... karna saya ingin membentuk $\sqrt{21}$ ini menjadi ... e ... apa di'? memisalkan ... memisalkan dulu kan bilangan rasional $\frac{a}{b}$, kemudian $\frac{a}{b}$ itu sama dengan bilangan apa, misalnya $\sqrt{21}$ bisa tidak dimisalkan t dengan $\sqrt{21}$ tapi ditulis $\sqrt{21}$ itu sama dengan bilangan rasional, bilangan rasional bentuknya $\frac{a}{b}$ tapi untuk mempermudah maka saya misalkan $\sqrt{21}$ ini dengan t , sama dengan ... ini merupakan suatu huruf jadi saya bisa misalkan ini huruf.
- P3.15.3.4 :begini, kita kan belum tahu apakah $\sqrt{21}$ itu betul-betul bilangan rasional
- S3.15.3.4 : iya
- P3.15.3.5 : mengapa Anda langsung memisalkan bahwa $t = \sqrt{21}$ dan $t = \frac{a}{b}$ mengapa anda langsung misalkan t itu sebagai bilangan rasional?

- S3.15.3.5 : karna untuk membuktikan apakah ... e ... ini bilangan rasional atau tidak kalo dia memenuhi artinya dia bilangan rasional tapi kalo dia tidak memenuhi artinya dia bukan bilangan rasional
- P3.15.3.6 : kan ini baru mau dibuktikan, mengapa Anda langsung mengatakan bahwa memisalkan $t = \sqrt{21}$? Mengapa anda memisalkan ... e ... $t = \sqrt{21}$ dan menyamakan, kan di sini $t = \frac{a}{b}$, berarti seakan-akan bahwa $\sqrt{21}$ itu sudah bentuk, sudah sama dengan $\frac{a}{b}$, ya kan? mengapa Anda langsung memisalkan hal itu?
- S3.15.3.6 : karna ... e Ini hanya memisalkan , misalkan ... e ... bentuknya t itu sudah bilangan rasional, misalkan t merupakan sudah bentuk bilangan rasional, ini hanya pemisalan sehingga apabila e ... sebentar jawabannya tidak memenuhi ini ... e jawabannya salah artinya t itu tidak memenuhi bilangan rasional
- P3.15.3.7 : t itu tidak memenuhi bilangan rasional?
- S3.15.3.7 : iya
- P3.15.3.8 : apa yang anda maksud di sini *misalkan*?
- S3.15.3.8 : *misalkan*
- P3.15.3.9 : apa maksudnya Anda mengatakan di sini *misalkan*?
- S3.15.3.9 : maksudnya suatu bilangan e ... apa ... sebuah pengandaian, bilangan ini sudah ... bilangan ini diandaikan menjadi bilangan rasional, nah apabila ... e ... pengandaian salah, artinya ... e ... bilangan itu bukan rasional
- P3.15.3.10 : bukan rasional? begitu? jadi pengandaian? Apakah pengandaian sama dengan pemisalan? Dimisalkan, apakah mengandaikan sama dengan misalkan? Atau apa perbedaan misalkan dengan andai?
- S3.15.3.10 : misalkan ... apa di? nda kutau kak
- P3.15.3.11 : jadi apa di sini yang tepat menurut Anda?
- S3.15.3.11 : andaikan
- P3.15.3.12 : andaikan? Apakah Anda tahu adakah pembuktian dengan cara seperti ini, anda tahu apa namanya?
- S3.15.3.12 : tidak tau kak
- P3.15.3.13 : tidak tau?
- S3.15.3.13 : iye
- P3.15.3.14 : mengapa Anda bisa mengatakan andaikan? Langsung mengatakan, andaikan ...?
- S3.15.3.14 : e ... apa ... sebelumnya saya mend sebelumnya pada saat e ... mau membuktikan, membuktikan suatu definisi atau e ... aksioma pakai kata pengandaian.
- P3.15.3.15 : apakah semua teorema selalu dibuktikan dengan pengandaian?
- S3.15.3.15 : nda taumi kak
- P3.15.3.16 : kenapa Anda bilang untuk membuktikan suatu teorema semuanya, semuanya yah?

- S3.15.3.16 : nda semua
- P3.15.3.17 :tapi mengapa soal ini pakai pengandaian? Atau mengapa Anda mengerjakan seperti ini?
- S3.15.3.17 : karna waktu belajar Analisis Real I begini kak caranya
- P3.15.3.18 : begini caranya?
- S3.15.3.18 : iye
- P3.15.3.19 : jadi, Anda juga mengikuti cara yang dipake pada saat mengajar, pada saat saya mengajar?
- S3.15.3.19 : iya kak
- P3.15.3.20 : ya, lanjut
- S3.15.3.20 : sehingga apabila dikuadratkan menjadi $t^2 = \frac{a^2}{b^2}$
- P3.15.3.21 : iye, pertama lagi, mengapa dikuadratkan?
- S3.15.3.21 : untuk menghilangkan akarnya
- P3.15.3.22 : Untuk menghilangkan akarnya?
- S3.15.3.22 : iya
- P3.15.3.23 : Kenapa harus hilang akarnya?
- S3.15.3.23 : Supaya dia menjadi bilangan rasional
- P3.15.3.24 : Supaya menjadi bilangan rasional? Alasannya?
- S3.15.3.24: alasannya karena kita tadi mau membuktikan, karena pengandaiannya tadi adalah bilangan rasional, bentuk bilangan rasional sehingga ... e sehingga kita mengubah juga bentuknya ini menjadi bilangan rasional
- P3.15.3.25 : ok, kita lanjut. Jadi alasannya tadi pangkat 2, dipangkatduakan supaya menjadi?
- S3.15.3.25 : e ... bilangan rasional
- P3.15.3.26 : supaya menjadi bilangan rasional?
- S3.15.3.26 : iya, karena pengandaian tadi adalah bentuk bilangan rasional
- P3.15.3.27 : tapi kan dia sudah mengandaikan, sudah mengandaikan $\sqrt{21}$ adalah bilangan rasional, untuk apa lagi kita pangkatduakan? Untuk apa lagi kita pangkat duakan? Untuk apalagi anda bilang kalau dipangkat duakan akan menjadi juga bilangan rasional na tadi juga sudah diandaikan dia adalah bilangan rasional tanpa memangkatduakan anda sudah bilang saya andaikan bilangan rasional dan kenapa tadi dibilang dipangkatduakan supaya supaya menjadi bilangan rasional sebelum dipangkatduakan anda sudah mengandaikan bahwa dia bilangan rasional, apa gunanya pangkat dua?
- S3.15.3.27 : begini kak, misalkan tadi t itu bentuknya $\frac{a}{b}$, nilainya kan tetap, nilainya ini adalah sebenarnya bilangan irrasional.
- P3.15.3.28 : anda belum tahu bahwa ini $\sqrt{21}$ apakah bilangan rasional atau bilangan irrasional , anda belum tahu makanya soalnya disitu

- buktikan jadi jangan langsung menyimpulkan bahwa $\sqrt{21}$ adalah bilangan irrasional
- S3.15.3.28 : he ... he (ketawa)
- P3.15.3.29 : nda bisa langsung disimpulkan karna anda kan tidak tau, belum tahu belum membuktikannya, ya kan?
- S3.15.3.29 : iya
- P3.15.3.30 : ok, trus lanjut ke bawah ...
- S3.15.3.30 : $a^2 = 21 b^2$
- P3.15.3.31 : kenapa hasilnya begitu?
- S3.15.3.31 : ini (menunjuk) dikali ... bagaimana caranya kudapat itu?
- P3.15.3.32 : mengapa menjadi $a^2 = 21 b^2$?
- S3.15.3.32 : mmm ...
- P3.15.3.33 : kemukakan saja alasannya kenapa?
- S3.15.3.33 : karna cara ringkasnya kak, $21 \times b^2 = a^2$
- P3.15.3.34 : mengapa bisa begitu?
- S3.15.3.34 : e ... $a^2 = \dots$ ini kan sama dengan ini ... dikali silang
- P3.15.3.35 : dikali silang?
- S3.15.3.35 : iye
- P3.15.3.36 : itu, perkalian silang begitu, apa alasannya?
- S3.15.3.36 : tidak ada
- P3.15.3.37 : tidak ada atau bagaimana, tidak ada atau tidak tau?
- S3.15.3.37 : tidak tau kak, dikali berapa ini supaya bisa ... oh saya taumi kak dikali dengan b^2
- P3.15.3.38 : apanya dikali b^2 ?
- S3.15.3.38 : $21 = \frac{a^2}{b^2}$, kedua ruas dikali dengan b^2 , sehingga $21b^2 = \frac{a^2}{b^2}$ dikali dengan b^2 , jadi $21b^2 = a^2 \times \frac{1}{b^2} \times b^2$, $21b^2 = a^2 \times \frac{b^2}{b^2}$, langsungmi $21b^2 = a^2$ atau $a^2 = 21b^2$
- P3.15.3.39 : kenapa dipisah ini $a^2 \times \frac{1}{b^2}$, nah awalnya tadi $\frac{a^2}{b^2}$ begini bentuknya (menunjuk $\frac{a^2}{b^2}$)
- S3.15.3.39 : ini sam ... sebenarnya $\frac{a^2}{b^2}$ bentuknya $a^2 \times \frac{1}{b^2}$
- P3.15.3.40 : kenapa bisa dibilang sama? Apa alasan anda menyatakan bahwa sama?
- S3.15.3.40 : sama bentuknya karna apabila dikalikan, akan menghasilkan ini ($\frac{a^2}{b^2}$)
- P3.15.3.41 : alasannya apa? Berdasarkan apa Anda bilang itu?
- S3.15.3.41 : berdasarkan ... mmm kulupai, definisi ... aksioma kah kulupai kak
- P3.15.3.42 : apa yang ada di otak Anda, apa yang ada dipikiran Anda bahwa ini termasuk ...? Alasannya?

S3.15.3.42 : alasannya supaya ini mendapatkan si ... aksioma lapangan perkalian e ... invers terhadap perkalian.

P3.15.3.43 : kan begini Anda mengubah $\frac{a^2}{b^2}$ menjadi $a^2 \times \frac{1}{b^2}$. Mengapa Anda mengubah? Apa alasannya sama, ini dengan $\frac{a^2}{b^2}$ dengan $a^2 \times \frac{1}{b^2}$?

S3.15.3.43 : ada aksioma kayaknya kak

P3.15.3.44 : aksioma? Bagaimana bunyinya?

S3.15.3.44 : apabila ... tunggu dulu kak, apabila a kulupai kak

P3.15.3.45 : yah ini coba tadi yang Anda tulis?

S3.15.3.45 : $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

P3.15.3.46 : yah, itu termasuk apa? Bilang saja apa?

S3.15.3.46 : aksioma, sifat, definisi ... (ragu-ragu) tunggu dulu kak kupikirki ... sifat

P3.15.3.47 : sifat? Sifat apa?

S3.15.3.47 : sifat pada perkalian

P3.15.3.48 : sifat pada perkalian?

S3.15.3.48 : aksioma kayaknya kak

P3.15.3.49 : aksioma apa namanya

S3.15.3.49 : aksioma

P3.15.3.50 : aksioma pada apa ini?

S3.15.3.50 : aksioma pada operasi perkalian

P3.15.3.51 : perkalian?

S3.15.3.51 : iye

P3.15.3.52 : ya sudah tadi yah. jadi sampai di sini kan $a^2 = 21 b^2$, a ... ini mengapa tiba-tiba menjadi a lagi, a merupakan ... (sambil menunjuk pekerjaan subjek)

S3.15.3.52 : kelipatan

P3.15.3.53 : kelipatan apa? Kenapa tiba-tiba ... ini kan $a^2 = 21 b^2$, kenapa tiba-tiba menjadi a padahal di atasnya a^2 , baru dijelaskan tentang a^2 kenapa tiba-tiba menjadi a merupakan ...? a yang dijelaskan padahal di atasnya $a^2 = 21 b^2$

S3.15.3.53 : (bingung) tidak kutaui kak

P3.15.3.54 : saya tanya lagi kenapa a itu kelipatan 21?

S3.15.3.54 : dilihat dari $a^2 = 21 b^2$

P3.15.3.55 : kok, bisa Anda langsung simpulkan bahwa ... e ... kalo $a^2 = 21 b^2$ maka a -nya pasti kelipatan 21 sedangkan a^2 -nya saja anda belum ada, kenapa juga langsung a kelipatan 21?

S3.15.3.55 : karna $a^2 = 21 b^2$... e ... karna ... e ... untuk melihat kelipatan ... apa di'? (berpikir lama) ... a merupakan kelipatan ... e ... kita melihat angka yang berada di depan ... e ... a^2 , $a^2 = 21 b^2$ tidak dihilangkan pangkatnya karna kalo dihilangkan dapat $\sqrt{21}$ kembali

ke bentuk semula $21b^2$... eh ... $\sqrt{21}$, sedangkan kita yang mau ketahui ... ini, apakah 21 ini merupakan faktor ... relatif faktor prima atau tidak?

P3.15.3.56 : yah, itu lagi mengapa ada lagi faktor prima?

S3.15.3.56 : karena jika bilangan rasional, rasional ... e ... faktornya itu relatif prima

P3.15.3.57 : apa maksudnya relatif prima?

S3.15.3.57 : tidak kutauki kak

P3.15.3.58 : tidak tau

S3.15.3.58 : iye. ... e ... yang saya dengar waktu belajar, hanya ini kalau bilangan rasional itu faktornya relatif prima yaitu hanya 1 dan dirinya sendiri.

P3.15.3.59 : jadi maksud Anda itu, anda ... e ... yang ada dipikiran Anda relatif prima itu adalah ..., faktor relatif prima itu adalah apa?

S3.15.3.59 : faktornya hanya dirinya sendiri dengan 1

P3.15.3.60 : contohnya?

S3.15.3.60 : contohnya 2

P3.15.3.61 : 2 ...kenapa dengan 2?

S3.15.3.61 : bukan 2 kak, ... mmm ... (berpikir) emmm bukan 2 ...(berpikir lama) pusinga

P3.15.3.62 : ok, kita lanjut pale kalau begitu

S3.15.3.62 : nda kutauki kak

P3.15.3.63 : yang saya mau tanyakan kan $a^2 = 21b^2$

S3.15.3.63 : iye

P3.15.3.64: kenapa tiba-tiba a langsung merupakan kelipatan 21, padahal di atas tidak pernah belum ada a , mengapa Anda tiba-tiba menyimpulkan bahwa a juga merupakan kelipatan 21 dengan hanya melihat $a^2 = 21b^2$?

S3.15.3.64 : saya hanya melihat koefisien dari b^2 artinya itu merupakan kelipatan dari 21

P3.15.3.65 : ok apa ini? (menunjuk) kelipatan dari 21 ... 1, 3, 7, 21. Apa maksudnya itu?

S3.15.3.65 : kelipatan dari 21

P3.15.3.66 : kenapa itu? apa maksudnya kelipatan dari 21?

S3.15.3.66 : kelipatannya 1, 3, 7, 21

P3.15.3.67 : apa maksudnya?

S3.15.3.67 : $1 \times 21 = 21$ eh ... $3 \times 7 = 21$, $7 \times 3 = 21$, $21 \times 1 = 21$

P3.15.3.68 : jadi kelipatan dari 21 adalah 1? Begitu maksudnya? Kelipatan dari 21 adalah 1, 3, 7, 21?

S3.15.3.68 : oh salah kak, tidak ada 21-nya

P3.15.3.69 : jadi kelipatan ... sudah cocok ini kelipatan dari 21 adalah 1, 3 dan 7? Begitu?

S3.15.3.69 : iye $1 \times 3 \times 7 = 21$,
P3.15.3.70 : ini maksudnya 1, 3, 7 ... $1 \times 3 \times 7 = 21$? Atau bagaimana?
S3.15.3.70 : iye, begini 21 ... apa di'? kalo kelipatan ... iya ...(ragu-ragu)
P3.15.3.71 : bagaimana?
S3.15.3.71 : kelipatan 21 ... 1, 3, 7 ... iye $1 \times 3 \times 7 = 21$
P3.15.3.72 : maksudnya ini?
S3.15.3.72 : iye.
P3.15.3.73 : trus karena a merupakan kelipatan ...
S3.15.3.73 : karena a merupakan kelipatan
P3.15.3.74 : maksudnya kelipatan? Maksudnya kelipatan apa?
S3.15.3.74 : merupakan kelipatan, a merupakan kelipatan 21
P3.15.3.75 : karena a merupakan kelipatan 21 maka ...
S3.15.3.75 : dapat ditulis $a = 21k$ sehingga ...
P3.15.3.76 : mengapa bisa langsung anda simpulkan bahwa jika a kelipatan 21 maka dapat ditulis $a = 21k$
S3.15.3.76 : ... e ... k ini hanya pengandaian, pengandaian kelipatan
P3.15.3.77 : jadi k ini apa?
S3.15.3.77 : k ini variabel
P3.15.3.78 : variabel?
S3.15.3.78 : iye (ragu-ragu)
P3.15.3.79 : variabel?
S3.15.3.79 : variabel yang dimisalkan kelipatan
P3.15.3.80 : begitu
S3.15.3.80 : a itu merupakan ... iye pengandaian, pengandaian kelipatan karna ini $21k$ diambil, ditulis k karna pengandaian kelipatan
P3.15.3.81 : apa maksudnya pengandaian kelipatan?
S3.15.3.81 : ini karna a merupakan kelipatan maka $a = 21k$
P3.15.3.82 : k -nya di sini apa?
S3.15.3.82 : variabel
P3.15.3.83 : variabel?
S3.15.3.83 : iye
P3.15.3.84 : variabel yang ... untuk apa variabel?
S3.15.3.84 : e ... variabel memisalkan kelipatan
P3.15.3.85 : variabel memisalkan kelipatan? Tidak ada yang lain? k nya ... k adalah apa?
S3.15.3.85 : ada kurasa, kulupai kak, yah dikuadratkan lagi $a^2 = 441k^2$ karna $a^2 = a^2$, oh ini persamaan 1 (menunjuk)
P3.15.3.86 : ada di sini pernyataan Anda yang berbeda dengan ujian tulisannya, kan dibilang tadi bahwa a merupakan kelipatan dari 21?
S3.15.3.86 : iye
P3.15.3.87 : trus kelipatan dari 21 = 1, 3 dan 7, ... 1, 3, 7 kan? Atau tadi Anda bilang $21 = 1 \times 3 \times 7$

S3.15.3.87 : iye

P3.15.3.88 : di sini $a = 21$, memiliki faktor persekutuan 1, 3 dan 7 karena 21 memiliki faktor persekutuan lebih dari 2 maka 21 merupakan bukan faktor prima. Apa maksudnya?

S3.15.3.88 : (senyum)

P3.15.3.89 : apa maksud dari yang pada saat Anda menulis ujian tulisan dengan yang tadi yang mana yang menurut anda benar?

S3.15.3.89 : maksudnya faktor persekutuan itu karna 21 bisa dibagi 3 hasilnya 7 kemudian 21 bisa dibagi 7 hasilnya ... eh ... iya hasilnya 3, kemudian faktor dari 21 itu 3, 7 dan 1

P3.15.3.90 : tadi Anda bilang kelipatan dari 21 adalah 1, 3, 7 sekarang Anda bilang faktor dari 21 adalah 1, 3, 7, yang mana yang benar?

S3.15.3.90 : dua-duanya

P3.15.3.91 : a Kenapa?

S3.15.3.91 : dua-duanya benar ... he ...he ...

P3.15.3.92 : dua-duanya benar?

S3.15.3.92 : he em (mengiyakan)

P3.15.3.93 : ok, setelah itu karna a tadi $= 21 k$, k tadi adalah tadi apa? Tadi yang Anda bilang itu apa? Atau ada pendapat lain?

S3.15.3.93 : ada, tapi kulupai kak

P3.15.3.94 : oh, ada tapi dilupa?

S3.15.3.94 : iye ... ada

P3.15.3.95 : Trus tadi a^2 ... mengapa dipangkatduakan lagi?

S3.15.3.95 : sama ini kak, untuk mendapatkan persamaannya bentuk kuadrat ... untuk mendapatkan persamaan ... bentuknya seperti ini persamaan 1

P3.15.3.96 : untuk mendapatkan persamaan? Bisa lebih disederhanakan lagi kata-katanya?

S3.15.3.96 : e ... untuk mendapatkan ... untuk mendapatkan bentuk yang sama pada pengandaian tadi ... e ... untuk mendapatkan bentuk yang sama dalam mencari kelipatan

P3.15.3.97 : jadi dipangkatduakan?

S3.15.3.97 : dipangkatduakan, jadi $a^2 = 441 k^2$ didapat ini adalah bentuk kedua, ini bentuk pertama (menunjuk), bentuk kedua karna sama-sama a^2 , bentuk pertama a^2 itu $21 b^2$, bentuk kedua itu $a^2 = 441 k^2$, maka dapat ditulis $a^2 = a^2$ sehingga dapat ditulis $441 k^2 = 21 b^2$, kita dapatkan $b^2 = 21 k^2$

P3.15.3.98 : mengapa hasilnya begini ...?

S3.15.3.98 : kedua ruas dikali dengan $\frac{1}{21}$

P3.15.3.99 : kedua ruas dikali dengan $\frac{1}{21}$? itu merupakan apa?

S3.15.3.99 : mmm aksio ... eh ... sifat pada perkalian

P3.15.3.100: sifat pada perkalian?

S3.15.3.100: iye

P3.15.3.101 : perkalian pada apa?

S3.15.3.101 : Maksudnya kak

P3.15.3.102 : Perkalian pada apa

S3.15.3.102 : Sifat pada perkalian

P3.15.3.103 : Sifat pada perkalian?

S3.15.3.103 : bilangan real

P3.15.3.104 : apa bunyinya?

S3.15.3.104 : tidak kutaui kak

P3.15.3.105 : nda tau?

S3.15.3.105 : iya, ini dikali inversnya, aksioma e ... lapangan pada perkalian, bilangan yang dikali dengan inversnya akan mendapatkan heh sama dengan 1, $21 b^2$ dikali dengan inversnya $\frac{1}{21}$... eh tidak boleh ... tidak boleh ... bukan kak bukan, sifat perkalian

P3.15.3.106 : sifat perkalian?

S3.15.3.106: pada bilangan real

P3.15.3.107 : pada bilangan real itu?

S3.15.3.107 : iya

P3.15.3.108 : bagaimana bunyinya,

S3.15.3.108 : apabila kedua ruas dikalikan dengan bilangan yang sama dapat disederhanakan menjadi bilangan yang paling sederhana sehingga $b^2 = 21 k^2$, e ... kita melihat lagi jadi b ini merupakan kelipatan 21

P3.15.3.108 : pertanyaan yang sama tadi mengapa tadi $b^2 = 21 k^2$, kenapa tiba-tiba b merupakan kelipatan dari 21?

S3.15.3.108 : ... e ... sama tadi kak, saya lihat ... e ... koefisien di depannya saja

P3.15.3.109 : yang di depan koefisien kan b^2 , bukan b?

S3.15.3.109 : iya, karna apa tadi itu ... (berpikir) oh ...kembali ke sini kayaknya kak

P3.15.3.110 : kembali kemana?

S3.15.3.110 : ke sini $t^2 = \frac{a^2}{b^2}$

P3.15.3.111 : apa hubungannya?

S3.15.3.111 : (senyum) tidak kutau

P3.15.3.112 : nda tau?

S3.15.3.112 : iya nda kutaui kak,

P3.15.3.113 : Iya lanjut

S3.15.3.113 : kemudian kelipatan dari a ... 1, 3, 7

P3.15.3.114 : kenapa dihapus 21, maksud saya, saya juga tidak mengatakan itu salah ya tapi mengapa tiba-tiba anda menghapus, tadi sudah menuliskan 21 ... 1, 3, 7, 21, kenapa tiba-tiba dihapus?

S3.15.3.114 : nda masukki kak

P3.15.3.115 : kenapa tidak masuk?

S3.15.3.115 : mmm ... karena kelipatannya 21 itu 1, 3, 7

P3.15.3.116 : trus kenapa b-nya juga 1, 3, dan 7? Kelipatan dari b juga?

S3.15.3.116 : iye

P3.15.3.117 : coba nah Anda lihat di sini kan a merupakan kelipatan 21, kenapa di sini kelipatan dari a ... 1, 3, 7 tidak masuk 21, tapi Anda tadi tulis begitu, a merupakan kelipatan 21, kenapa dicoret? Na di atas Anda tulis sendiri bahwa a kelipatan 21

S3.15.3.117 : masukki kak, ba ... masukki

P3.15.3.118 : ok, trus lanjut

S3.15.3.118 : karna a dan b merupakan kelipatan ... sehingga bukan faktor prima jadi ...

P3.15.3.119 : maksudnya bukan faktor prima itu apa?

S3.15.3.119 : faktor prima ... yang maksudnya ... faktornya itu ... bukan faktor prima maksudnya faktornya itu lebih dari 2, ini ada 4

P3.15.3.120 : oh begitu? jadi maksud Anda di sini faktor prima adalah yang memiliki faktor, yang hanya memiliki 2 faktor? Sedangkan di sini ada 4 faktor (1, 3, 7 dan 21)

S3.15.3.120 : iye

P3.15.3.121 : trus,

S3.15.3.121 : jadi $\sqrt{21}$ bukan merupakan bilangan rasional

P3.15.3.122 : $\sqrt{21}$ bukan merupakan bilangan rasional,

S3.15.3.122 : syaratnya tadi ini kak, jika bilangan rasional itu faktornya relatif prima, nda tau alasannya kenapa bisa

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 tidak mampu membuktikan soal tersebut dengan benar walaupun langkah-langkah yang diambil sudah tepat namun alasannya tidak jelas,. Adapun langkah-langkah yang alasannya tidak jelas tersebut adalah:

- Subjek bingung membedakan kata “memisalkan” dan “mengandaikan”.

- Dari langkah $a^2 = 21b^2$ dan $b^2 = 21k^2$ subjek mampu menjelaskan bahwa a^2 dan b^2 adalah kelipatan 21 namun tidak dapat menjelaskan mengapa a dan b juga merupakan kelipatan 21
- Subjek sulit membedakan konsep faktor prima, relatif prim dan faktor persekutuan
- Tidak memahami konsep kelipatan
- Subjek tidak mampu menjelaskan apa itu variabel k dan untuk apa digunakan variabel k pada $a = 21 k$

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.15.3.2; S3.15.3.3; S3.15.3.5; S3.15.3.6; S3.15.3.9; S3.15.3.10; S3.15.3.12; S3.15.3.17; S3.15.3.19; S3.15.3.20; S3.15.3.21; S3.15.3.23; S3.15.3.24; S3.15.3.27; S3.15.3.32; S3.15.3.33; S3.15.3.38; S3.15.3.39; S3.15.3.43; S3.15.3.52; S3.15.3.53; S3.15.3.54; S3.15.3.55; S3.15.3.56; S3.15.3.57; S3.15.3.59; S3.15.3.64; S3.15.3.66; S3.15.3.67; S3.15.3.74; S3.15.3.75; S3.15.3.76; S3.15.3.80; S3.15.3.81; S3.15.3.82; S3.15.3.97; S3.15.3.99; S3.15.3.108; S3.15.3.122] atas pertanyaan [P3.15.3.2; P3.15.3.3; P3.15.3.5; P3.15.3.6; P3.15.3.9; P3.15.3.10; P3.15.3.12; P3.15.3.17; P3.15.3.19; P3.15.3.20; P3.15.3.21; P3.15.3.23; P3.15.3.24; P3.15.3.27; P3.15.3.32; P3.15.3.33; P3.15.3.38; P3.15.3.39; P3.15.3.43; P3.15.3.52; P3.15.3.53; P3.15.3.54; P3.15.3.55; P3.15.3.56; P3.15.3.57; P3.15.3.59; P3.15.3.64; P3.15.3.66; P3.15.3.67; P3.15.3.74; P3.15.3.75; P3.15.3.76; P3.15.3.80; P3.15.3.81; P3.15.3.82; P3.15.3.97; P3.15.3.99; P3.15.3.108; P3.15.3.122] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara pada materi pembuktian bilangan rasional, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami karena tidak dapat menunjukkan suatu bilangan merupakan bilangan rasional atau bukan melalui bukti kontradiksi. Dengan demikian subjek S3 tidak memahami konsep bilangan rasional, sehingga tidak termasuk dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

• **Pemahaman terhadap Materi Sifat Urutan Pada Bilangan Real.**

Transkrip wawancara 4 nomor 16

- P3.16.4.1 : wawancara keempat, jika $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $a < b$ dan $c < d$,
buktikan bahwa $ad + bc < ac + bd$!
- S3.16.4.1 : (subjek mengerjakan soal selama beberapa menit) sudahmi kak
- P3.16.4.2 : ya coba anda jelaskan langkah pertama?
- S3.16.4.2 : sesuai dengan aksioma ... iya ... aksioma kelengkapan kayaknya ini
sesuai dengan aksioma $a < b = a - b$
- P3.16.4.3 : alasannya apa ini? $a < b$ kenapa tiba – tiba $= a - b$?
- S3.16.4.3 : sesuai aksioma ...
- P3.16.4.4 : aksioma pada apa itu?
- S3.16.4.4 : aksioma keleng Aksioma urutan
- P3.16.4.5 : maksud saya yang mana menurut anda benar?
- S3.16.4.5 : aksioma nda kutau apa judulnya kak, $a < 0$ itu $= a - 0$
- P3.16.4.6 : iya aksioma terdapat pada materi apa itu kira-kira?
- S3.16.4.6 : materi kekedua
- P3.16.4.7 : apa itu materi kedua?
- S3.16.4.7 : kelengkapan
- P3.16.4.8 : kelengkapan?
- S3.16.4.8 : urutan, aksioma urutan, sesuai dengan aksioma urutan, ini termasuk
trikotomi
- P3.16.4.9 : trikotomi?
- S3.16.4.9 : iye, $a < 0 = a - 0$, jadi $a < b = a - b$
- P3.16.4.10 : ini a atau $-a$?
- S3.16.4.10 : a a
- P3.16.4.11 : hati-hati ya
- S3.16.4.11 : iye, $a < 0 = a - 0$ jadi $a < b = a - b$, $c < d$, itu alasannya sama
sesuai aksioma jadi $c < d = c - d$ untuk mendapat yang mau

dibuktikan $ad + bc < ac + bd$, maka saya kalikan $a - b$ dikali dengan $c - d$

P3.16.4.12 : bisakah dikali? Kenapa dikali?

S3.16.4.12 : supaya dapatki ini kak (menunjuk $ad + bc < ac + bd$)

P3.16.4.13 : maksud saya ada alasan yang lain? Maksud saya alasan yang punya dasar, mengapa dikali

S3.16.4.13 : e ... $(a - b) \cdot (c - d)$, mmm ... tidak kutaui kak

P3.16.4.14 : nda tau?

S3.16.4.14 : iye

P3.16.4.15 : kenapa dikali?

S3.16.4.15 : yang jelasnya dikali, trus $(a - b) \cdot (c - d)$ eh menggunakan apa itu kalo kali masuk? Faktor ... perkalian faktor yang ini kak eh, apa namanya dikali ... perkalian pada pempfaktoran

P3.16.4.16 : perkalian pada pempfaktoran?

S3.16.4.16 : eh tidak kutaui kak, yang jelasnya ini perkalian, bukan perkalian pempfaktoran ... distributif ... bukan

P3.16.4.17 : apa tadi disebutkan?

S3.16.4.17 : pempfaktoran?

P3.16.4.18 : trus, anda yakin pempfaktoran?

S3.16.4.18 : nda yakin kak

P3.16.4.19 : trus apa lagi yang ada dipikiran anda?

S3.16.4.19 : eh $(a - b) \cdot (c - d)$ itu sama ... perkalian, (lama berpikir) tidak kutaumi kak

P3.16.4.20 : tidak ditau ?ok lanjut

S3.16.4.20 : dikali $a \cdot c = ac$, kemudian $(-b) \cdot (-d)$...oh salah $a \cdot c = ac$, $a \cdot (-d)$ itu $= -ad$, $(-b) \cdot c = -bc$, $(-b) \cdot (-d) = bd$

P3.16.4.21 : ya saya tanya dulu $a \cdot c = ac$, kalo $a \cdot (-d) = -ad$, alasannya kenapa?

S3.16.4.21 : $a \cdot (-1) = -a$

P3.16.4.22 : trus

S3.16.4.22 : jadi $a \cdot (-d) = -ad$

P3.16.4.23 : $-ad$? Begitu?

S3.16.4.23 : iye

P3.16.4.24 : kenapa langsung ... di, ini kan -1 , ini $-d$, iya kan? Kenapa langsung bisa anda simpulkan bahwa hasilnya $-ad$

S3.16.4.24 : karena ... e ... kan negatif ... eh negatif ini kan kalo menurut teorema ini $a \cdot (-1) = -a$, itu kan $a \cdot (1) = a$, jadi tetap $-a$, ini kan $a \cdot (-d)$ itu tidak bisa apa? Sama-sama ...karna bentuknya samaji kak

P3.16.4.25 : bentuknya sama?

S3.16.4.25 : iye,

P3.16.4.26 : walaupun beda 1 dan d

S3.16.4.26 : iya
 P3.16.4.27 : 1 itu sudah jelas 1 toh
 S3.16.4.27 : iye
 P3.16.4.28 : d itu belum tentu 1 kan?
 S3.16.4.28 : d belum tentu 1
 P3.16.4.29 : kenapa disamakan
 S3.16.4.29 : oh ini ... sama ... ad bisa diganti dengan bilangan real
 P3.16.4.30 : begitu?
 S3.16.4.30 : iye
 P3.16.4.31 : karna di sini a, b, c, d itu elemen real, jadi bisa saja ini boleh 1, boleh 2, boleh (-3) , boleh bentuknya pecahan.
 S3.16.4.31 : jadi apabila a dikali dengan ... jadi sesuai dengan definisi $a \cdot (-d)$ itu $-ad$
 P3.16.4.32 : $-ad$? Tidak ada cara lain?
 S3.16.4.32 : tidak adami kak, ituji
 P3.16.4.33 : ok trus
 S3.16.4.33 : kemudian ... e ... $-(b) \cdot c = -bc$ samaji kak, eh ini yang tidak kutahu $-b \cdot -d = bd$
 P3.16.4.34 : trus di sini $-b \cdot -d$ kenapa tiba-tiba bd ?
 S3.16.4.34 : ada anuka, ada teorema begini
 P3.16.4.35 : apa itu?
 S3.16.4.35 : tidak kutahui kulupai
 P3.16.4.36 : coba diingat?
 S3.16.4.36 : ada
 P3.16.4.37 : apa itu Contohnya?
 S3.16.4.37 : negatif a dikali c ... kulupa sekali kak ... (berpikir) ... $(-1) \cdot (-1) = 1$
 P3.16.4.38 : iya, bagaimana caranya supaya $-b \cdot -d = bd$
 S3.16.4.38 : bisa saja b dan d ini sama dengan 1, karna tadi diketahui a, b, c, d itu elemen real, jadi ini hanya pengandaian suatu bilangan real, jadi jika dikalikan negatif b dengan negatif d itu sama dengan bd sesuai dengan teorema $(-1) \cdot (-1) = 1$
 P3.16.4.39 : ada cara lain?
 S3.16.4.39 : nda adami kak
 P3.16.4.40 : ok, trus,
 S3.16.4.40 : jadi i ..deh kuapai ini? kuubah dulu bentuknya kak
 P3.16.4.41 : iya
 S3.16.4.41 : (menulis) $ac + (-ad) + (-bc) + bd$
 P3.16.4.42 : kenapa dikelompokkan?
 S3.16.4.42 : iya di? Samaji anunya ... (pusing), (lama berpikir)
 P3.16.4.43 : kan saya menanyakan kenapa dikelompokkan, belum tentu salah, saya hanya menanyakan kenapa dikelompokkan tapi kalo

- misalnya anda tidak tau jawaban dan ada jawaban lain silahkan ditulis, tidak selamanya saya menanyakan berarti salah
- S3.16.4.43 : tidak kutahui kak
- P3.16.4.44 : iya iya ok trus?
- S3.16.4.44 : saya kelompokkan sesuai dengan yang mau dibuktikan $ad + bc$ berarti ini sama dengan ini $(-ad) + (-bc)$ kemudian ditambah $ac + bd$, ada tadi $-ad + bc + ac + bd$
- P3.16.4.45 : Kenapa dari bentuk $-ad + -bc$ bisa berubah menjadi $-(ad + bc)$?
- S3.16.4.45 : ada tadi kak soal
- P3.16.4.46 : soal yang bagaimana?
- S3.16.4.46 : soal ... e ... apa itue sebelum, sebelum ini,
- P3.16.4.47 : apa bunyinya?
- S3.16.4.47 : ... e ... $-(a + b) = (-a) + (-b)$
- P3.16.4.48 : tapi sudah terbukti?
- S3.16.4.48 : terbukti
- P3.16.4.49 : oh ya jadi bisa dipakai
- S3.16.4.49 : iye
- P3.16.4.50 : apakah bisa dipakai?
- S3.16.4.50 : bisa dipakai kak karna sudah terbukti, jadi $(-ad) + bc + ac + bd$ sesuai dengan definisi, definisi itukah? eh ... salah ... bukan ... mmm ... oh ya sesuai dengan aksioma tadi aksioma ... negatif ... bukan kak, tidak kutau apa di sini,
- P3.16.4.51 : kenapa tiba-tiba $(ad + bc) - (ac + bd)$
- S3.16.4.51 : pasti itu pertanyaannya , e definjisi kak definisi kayaknya kak yang itu yang ketika negatif a itu ... (berpikir) oh pembuktiannya teorema ... pembuktian kah? kalo $a - d$... bukan, tidak kutau kak apa alasannya, yang jelasnya kalo dia negatif di sini artinya pastia dia kurang dari
- P3.16.4.52 : jadi dari sini ke sini?
- S3.16.4.52 : iye
- P3.16.4.53 : alasannya?
- S3.16.4.53 : alasannya aksioma apakah itu
- P3.16.4.54 : yang jelas betulkah ini aksiomanya? Adakah seperti itu aksiomanya?
- S3.16.4.54 : aksioma ... ada kak, iya ada
- P3.16.4.55 : kan tadi anda bilang begini $a < 0 = a - 0$
- S3.16.4.55 : iye
- P3.16.4.56 : kan sudah begini bentuknya kan, bagaimana caranya supaya dari sini bisa bentuknya ke sini (sambil menunjuk) dengan menggunakan sesuai dengan tadi apa yang anda bilang ... aksioma urutan
- S3.16.4.56 : tunggu dulu kak ... dikali dengan (-1)
- P3.16.4.57 : dikali dengan (-1) ? Yang mana dikali dengan (-1) ?

S3.16.4.57 : ini (sambil menunjuk)
 P3.16.4.58 : coba saya mau lihat?
 S3.16.4.58 : Jadi $(ad + bc) - (ac + bd)$
 P3.16.4.59 : Hasilnya?
 S3.16.4.59 : hasilnya sesuai aksioma ini Jadi $(ad + bc) <$
 P3.16.4.60 : $(ad + bc) < (ac + bd)$? Yakin?
 S3.16.4.60 : tidak begitu caranya dibuku ... tidak begitu caranya dibuku kak ...
 sayaji yang bilang-bilangi
 P3.16.4.61 : oh begitu?
 S3.16.4.61 : iye. Kalo contoh yang pernah kulihat seperti ini tapi alasannya
 berubah menjadi ini tidak kutahui kak.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek dapat membuktikan soal nomor 16 namun langkah-langkah yang digunakan tidak tepat dan alasannya pun tidak jelas. Adapun langkah-langkah pembuktiannya yang tidak tepat dan alasan yang tidak jelas adalah:

- menuliskan aturan yang salah kalau $a < b$ itu artinya $a - b$, $c < d$ itu artinya $c - d$ merupakan aksioma urutan artinya subjek belum memahami betul bagaimana menyelesaikan soal pembuktian dan terkesan menghafal.
- Subjek mengalikan $(a - b)(c - d)$ tapi tidak mampu memberikan alasan yang tepat, subjek hanya mengatakan dengan melihat dari yang akan dibuktikan yaitu $ad + bc < ac + bd$, maka subjek menyimpulkan untuk dikali.
- Subjek mengalikan $a(-d) = -ad$ dan $(-b)c = -bc$ dengan alasan menggunakan teorema $a \cdot (-1) = -a$
- Subjek mendapatkan hasil yaitu $ad + bc - (ac + bd)$ menjadi $ad + bc < ac + bd$ dengan dasar yang dibuat-buat oleh subjek kalo $a < 0 = a - 0$.

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.16.4.2; S3.16.4.4; S3.16.4.5; S3.16.4.8; S3.16.4.9; S3.16.4.11; S3.16.4.13; S3.16.4.20; S3.16.4.21; S3.16.4.24; S3.16.4.33; S3.16.4.37; S3.16.4.38; S3.16.4.40; S3.16.4.41; S3.16.4.44; S3.16.4.45; S3.16.4.46; S3.16.4.47; S3.16.4.51; S3.16.4.56; S3.16.4.57 dan S3.16.4.60] atas pertanyaan [P3.16.4.2; P3.16.4.4; P3.16.4.5; P3.16.4.8; P3.16.4.9; P3.16.4.11; P3.16.4.13; P3.16.4.20; P3.16.4.21; P3.16.4.24; P3.16.4.33; P3.16.4.37; P3.16.4.38; P3.16.4.40; P3.16.4.41; P3.16.4.44; P3.16.4.45; P3.16.4.46; P3.16.4.47; P3.16.4.51; P3.16.4.56; P3.16.4.57 dan P3.16.4.60] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 16 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman instrumental.

Transkrip wawancara 4 nomor 17

- P3.17.4.1 : tentukan semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan berikut melalui langkah-langkah yang disertai alasan, mengapa langkah itu ditempuh (alasan dapat berupa aksioma, sifat, definisi atau teorema yang sesuai) $1 < x^2 < 4$!
- S3.17.4.1 : (subjek mengerjakan soal beberapa menit)
- P3.17.4.2 : (setelah melihat hasil kerja subjek) kenapa tiba-tiba anda akarkan itu?
- S3.17.4.2 : ... e ... ini x^2 ... e ... x^2 itu = ... e ... untuk mendapatkan x , kak
- P3.17.4.3 : untuk mendapatkan nilai x ?
- S3.17.4.3 : karna kalo $x^2 = x$ pangkat seper ... \sqrt{x} kan kalo x^2 itu ... e ... kalo jadi nilai x -nya itu harus bentuk akar karna ini pangkat 2, ini pangkat $\frac{1}{2}$, jadi 2 kali ...
- P3.17.4.4 : diperjelas ... diperjelas, jangan terlalu cepat.
- S3.17.4.4 : x^2 dikali dengan \sqrt{x} , x^2 menurut ... ada kak, ada aksioma, ada ... x^2 itu = \sqrt{x} , eh x^2 diubah menjadi $x = \sqrt{x}$
- P3.17.4.5 : \sqrt{x} ?
- S3.17.4.5 : eh \sqrt{x} hmmm salahma jika $x^2 = 1$ maka $x = \sqrt{1}$

- P3.17.4.6 : trus apa hubungannya $x^2 = 1$, $x = \sqrt{1}$ dengan ini (sambil menunjuk)
- S3.17.4.6 : ini kak?, ini samaji kalo saya hilangkan pangkat duanya berarti kedua bilangan yang ada di samping kiri dan kanannya itu saya akarkan.
- P3.17.4.7 : adakah alasannya? Alasan yang ada dasarnya anda melakukan itu?
- S3.17.4.7 : ada, teorema
- P3.17.4.8 : apa teorema, apa isi teoremanya?
- S3.17.4.8 : ini kak $x^2 = 1$ jadi $x = \sqrt{1}$ nda kutau apa ini kak
- P3.17.4.9 : coba dilanjutkan lagi, dilanjutkan yah diakarkan semua ruas yah termasuk ditengahnya juga? Semua ini?
- S3.17.4.9 : ya, bisa semua harus diakarkan
- P3.17.4.10 : trus
- S3.17.4.10 : jadi ini ... e ... x^2 kita ubah bentuknya, samaji kak $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{x^2} = x$, ... $\sqrt{4} = 2$
- P3.17.4.11 : mengapa anda langsung menyimpulkan $\sqrt{1} = 1$? Alasannya?
- S3.17.4.11 : karena $1^{\frac{1}{2}} = 1$
- P3.17.4.12 : $1^{\frac{1}{2}} = 1$? Dari mana anda dapat?
- S3.17.4.12 : tidak kutau kak
- P3.17.4.13 : nda tau?
- S3.17.4.13 : iye. Ini kalo x^2 ... eh ... x^2 dipangkatkan lagi $\frac{1}{2}$ hasilnya x^1 jadi x , kalo $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{1}{2}}$ artinya 2^1 jadi x di sini 2
- P3.17.4.14 : eh menurut ujian tulisan anda, katanya teorema $\sqrt{x^2} = |x|$, di mana anda? Teorema $\sqrt{x^2} = |x|$
- S3.17.4.14 : $\sqrt{x^2} = |x|$, oh iya kak ada teorema
- P3.17.4.15 : teorema?
- S3.17.4.15 : iya
- P3.17.4.16 : teorema apa? Maksud saya ...
- S3.17.4.16 : teorema pada harga nilai mutlak
- P3.17.4.17 : harga nilai mutlak?
- S3.17.4.17 : iye
- P3.17.4.18 : kemudian bagaimana caranya dihubungkan dengan teorema disitu?
- S3.17.4.18 : (berpikir sambil menulis) begitu kak
- P3.17.4.19 : jadi ini tadi yang $\sqrt{x^2}$ pada ujian tulisan anda, yang mana yang benar anda ambil? Ini atau yang barusan anda sebutkan?
- S3.17.4.19 : yang ini kak, teoremanya itu $\sqrt{x^2} = |x|$
- P3.17.4.20 : trus kenapa di sini bukan nilai mutlak x ?
- S3.17.4.20 : a ... e maksudnya harga nilai mutlak x hasilnya di sini yang positif diambil kak

P3.17.4.21 : begitu? jadi kiri kanannya harus positif? Maksudnya begitu?
 S3.17.4.21 : iya.
 P3.17.4.22 : ok saya tanya lagi, terakhir, apakah ada cara yang lain?
 S3.17.4.22 : cara yang lain?
 P3.17.4.23 : jika anda melihat soal seperti ini, apakah ada cara yang lain?
 S3.17.4.23 : tidak adami kak
 P3.17.4.24 : tidak ada

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek salah dalam menjawab soal karena banyak konsep-konsep prasyarat yang tidak diketahui. Adapun kesalahan-kesalahan yang terjadi adalah:

- Subjek tidak mencantumkan operasi himpunan yaitu “dan” pada pertidaksamaan di atas dalam menentukan himpunan penyelesaian soal tersebut.
- pada $x^2 = 1$, $x^2 = 4$, untuk mendapatkan nilai x , subjek langsung mengakarkan kedua ruas dan menggunakan sifat perpangkatan sehingga menjadi $x = \sqrt{1} = 1, x = \sqrt{4} = 2$, sedangkan pada ujian tulisan terdahulu teorema $\sqrt{x^2} = |x|$, karena subjek mengambil $\sqrt{x^2} = |x|$ maka hasil akhir yang diambil adalah yang bernilai positif karena melibatkan nilai mutlak.

Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.17.4.2; S3.17.4.5; S3.17.4.6; S3.17.4.7; S3.17.4.8; S3.17.4.10; S3.17.4.11; S3.17.4.12; S3.17.4.13; S3.17.4.14; S3.17.4.19; S3.17.4.20 dan S3.17.4.23] atas pertanyaan [P3.17.4.2; P3.17.4.5; P3.17.4.6; P3.17.4.7; P3.17.4.8; P3.17.4.10; P3.17.4.11; P3.17.4.12; P3.17.4.13; P3.17.4.14; P3.17.4.19; P3.17.4.20 dan P3.17.4.23] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 17 pada materi sifat urutan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, subjek tidak memahami dalam mencari himpunan penyelesaian secara matematis dengan menggunakan definisi dan teorema yang terkait pada materi sifat urutan pada bilangan real. Dengan demikian, Subjek S3 tidak memahami konsep dalam menentukan himpunan penyelesaian dengan melibatkan operasi himpunan, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

- **Pemahaman terhadap Materi Sifat Kelengkapan Pada Bilangan Real.**

Transkrip wawancara 5 nomor 18

- P3.18.5.1 : ok , adalah materi sifat kelengkapan pertanyaannya adalah pada himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$ dikenal konsep-konsep: batas atas, batas bawah, terbatas, supremum, infimum, maksimum dan minimum. Jelaskan definisi dari konsep-konsep tersebut!
- S3.18.5.1 : batas atas maksudnya semua anggota dari ... e ... misalnya tadi himpunan S adalah bagian e ... subset dari bilangan real, maksudnya semua anggota dari himpunan S harus lebih kecil dari u, u itu merupakan elemen bilangan real, sehingga u merupakan batas atas dari himpunan S, iya dari himpunan S
- P3.18.5.2 : bisa lihat gambarnya
- S3.18.5.2 : ini anggota himpunan S (menunjuk himpunan S) dan ini adalah u, u merupakan elemen bilangan real dan S adalah subset dari bilangan real, sehingga u ini merupakan batas atas ketika semua anggota S lebih kecil dari pada u
- P3.18.5.3 : semua anggota S lebih kecil dari pada?
- S3.18.5.3 : lebih kecil dari pada u, batas bawah maksudnya semua anggota dari himpunan S lebih besar dari w, sehingga w merupakan batas bawah dari himpunan S subset bilangan real dan w merupakan elemen real, gambarnya ini anggota dari himpunan S kemudian ini adalah u, u ini merupakan
- P3.18.5.4 : u atau w?
- S3.18.5.4 : eh w astagfirullah e ... semua anggota S lebih besar daripada w, w ini merupakan elemen real sedangkan S ini merupakan himpunan bagian yang dari bilangan real atau subset dari bilangan real

P3.18.5.5 : yang saya tanyakan dulu, dimulai dari batas atas, kalo anggota bilangan real itu apa saja?

S3.18.5.5 : e ... anggota bilangan real itu bilangan pecahan

P3.18.5.6 : nda, maksud saya yang ada digambar ini, yang ada di garis bilangan tersebut?

S3.18.5.6 : oh anggota bilangan real?

P3.18.5.7 : he em

S3.18.5.7 : e ... u, himpunan S

P3.18.5.8 : u dan himpunan S?

S3.18.5.8 : iye

P3.18.5.9 : kemudian yang saya tanyakan lagi itu kan anggota himpunan S

S3.18.5.9 : anggota himpunan S ini s

P3.18.5.10 : apakah dalam himpunan S itu hanya satu

S3.18.5.10 : tidak, banyak

P3.18.5.11 : banyak?

S3.18.5.11 : iye, banyak bukan hanya satu

P3.18.5.12 : trus yang saya tanyakan kenapa hanya dibilang s saja

S3.18.5.12 : s di sini terdapat banyak anggota dari himpunan S

P3.18.5.13 : jadi saya bisa bilang u itu , jangan dulu u adalah apa , anggotanya siapa?

S3.18.5.13 : u ini anggotanya bilangan real

P3.18.5.14 : u itu satu ...maksudnya bilangan u itu satu atau berapa?

S3.18.5.14 : satu bilangan ini u, bisa saja ada di depannya w, x, masih banyak bilangan yang ada di depannya , x, y, z

P3.18.5.15 : apakah u bisa saja anggota dari himpunan S

S3.18.5.15 : iya bisa saja

P3.18.5.16 : apakah u itu bisa saya tunjuk sembarang di mana daerahnya,

S3.18.5.16 : Maksudnya?

P3.18.5.17 : Maksudnya saya bisa tunjuk u itu bukan hanya di situ posisinya tidak hanya disebelah kanan dari himpunan S?

S3.18.5.17 : tidak bisa

P3.18.5.18 : mengapa

S3.18.5.18 : karena u itu harus lebih besar dari anggota himpunan S, sedangkan kalo dia di sebelah kirinya anggota dari himpunan S artinya u itu lebih kecil dari anggota himpunan S, jadi kalo batas atas itu u harus berada di sebelah kanan anggota himpunan S

P3.18.5.19 : apakah u bisa masuk pada himpunan S?

S3.18.5.19 : bisa

P3.18.5.20 : bisa, tapi bisanya di mana? Kapan dia bisa masuk dalam himpunan S?

S3.18.5.20 : apabila dia merupakan himpunan yang selang tertutup

P3.18.5.21 : bagaimana contohnya?

- S3.18.5.21 : misalnya ini $[1,3]$ selangnya tertutup , 3 ini merupakan batas atas dan misalnya ini ada $[1,3]$ ini adalah himpunan S, artinya 3 ini merupakan juga 3 ini merupakan anggota himpunan S sekaligus merupakan batas atas dari himpunan S
- P3.18.5.22 : batas atas dari himpunan S?
- S3.18.5.22 : iya
- P3.18.5.23 : tapi kalo misalnya selangnya buka bagaimana?kalo selang buka $(1,3)$? Apakah 3 juga masuk batas atas?
- S3.18.5.23 : masuk juga batas atas, 3 juga merupakan batas atas, tapi bisa saja ada 4, ada 5, juga merupakan batas atas, tapi yang diambil itu 3
- P3.18.5.24 : jadi 3 bisa masuk pada selang tutup ...
- S3.18.5.24 : bisa juga masuk pada selang buka
- P3.18.5.25 : jadi u bisa masuk pada himpunan S dengan syarat apa?
- S3.18.5.25 : dengan syarat u itu berada paling kanan dari semua anggota.
- P3.18.5.26 : yang dimaksud paling kanan dari semua anggota , apa?
- S3.18.5.26 : u itu lebih besar dari semua anggota lainnya
- P3.18.5.27 : semua anggota apa?
- S3.18.5.27 : semua anggota himpunan S lainnya
- P3.18.5.28 : itu?
- S3.18.5.28 : iya
- P3.18.5.29 : kemudian coba tadi batas bawah
- S3.18.5.29 : batas bawah maksudnya semua anggota dari himpunan S harus lebih besar dari w, sehingga w merupakan batas bawah dari himpunan S subset bilangan real, w itu merupakan bilangan real
- P3.18.5.30 : apakah jumlah dari w itu satu atau banyak?
- S3.18.5.30 : satu
- P3.18.5.31 : Satu saja?
- S3.18.5.31 : iya
- P3.18.5.32 : w itu elemen apa?
- S3.18.5.32 : elemen real
- P3.18.5.33 : kemudian untuk anggota himpunan S, berapa banyaknya anggota himpunan S?
- S3.18.5.33 : banyak, bisa lebih dari satu, dua, tiga, empat ...
- P3.18.5.34 : bisa ditentukan berapa?
- S3.18.5.34 : tidak bisa
- P3.18.5.35 : jadi posisi w terhadap himpunan S itu bagaimana?
- S3.18.5.35 : dia berada di sebelah paling kiri dari semua anggota himpunan S atau semua anggota himpunan S lebih besar daripada w
- P3.18.5.36 : tapi bisakah w itu berada pada himpunan S?
- S3.18.5.36 : bisa tapi dia berada di sebelah kiri ... paling kiri dari semua anggota himpunan S
- P3.18.5.37 : iya, begitu?
- S3.18.5.37 : iya

P3.18.5.38 : ok kita lanjut kepada terbatas, apa maksud terbatas itu?

S3.18.5.38 : terbatas itu ... ketika suatu himpunan dikatakan terbatas apabila himpunan tersebut itu terbatas ke atas dan terbatas ke bawah

P3.18.5.39 : maksudnya terbatas ke atas dan terbatas ke bawah?

S3.18.5.39 : suatu himpunan mempunyai batas atas dan batas bawah artinya dia mempunyai anggota yang dapat ditunjuk satu anggota yang berada paling kanan dan satu anggota yang berada paling kiri

P3.18.5.40 : begitu?

S3.18.5.40 : iya, anggota dari himpunan itu sendiri mempunyai batas atas dan batas bawah

P3.18.5.41 : itu yang disebut terbatas?

S3.18.5.41 : iya

P3.18.5.42 : bisa beri saya contoh?

S3.18.5.42 : e ... contohnya himpunan bilangan asli yang kurang dari atau samadengan 5, batas bawahnya 1, batas atasnya 5

P3.18.5.43 : kan tadi anda bilang batas atasnya banyak?jadi apa batas atasnya selain daripada 5?

S3.18.5.43 : 6, 7, 8

P3.18.5.44 : 6, 7, 8 dan seterusnya, begitu?

S3.18.5.44 : iya

P3.18.5.45 : sedangkan batas bawahnya?

S3.18.5.45 : 1

P3.18.5.46 : 1 saja?

S3.18.5.46 : 1 ji kak

P3.18.5.47 : tidak ada lagi yang lain? 1 saja?

S3.18.5.47 : iya, sudahmi kak 1 ji karna bilangan asli 1 ji yang paling kecil

P3.18.5.48 : ok trus e... jadi terbatas itu harus punya batas atas dan punya batas bawah? iya kalo misalnya hanya punya batas atas saja?

S3.18.5.48 : tidak terbatas

P3.18.5.49 : tetap tidak terbatas?

S3.18.5.49 : iya

P3.18.5.50 : kalo misalnya hanya punya batas bawah tapi tidak punya batas atas?

S3.18.5.50 : tidak terbatas

P3.18.5.51 : tetap tidak terbatas? jadi bagaimana?

S3.18.5.51 : harus kedua-duanya memenuhi terbatas ke atas dan terbatas ke bawah

P3.18.5.52 : ok, coba supremum?

S3.18.5.52 : supremum adalah batas atas terkecil

P3.18.5.53 : bisa dijelaskan bagaimana itu supremum?

S3.18.5.53 : misalnya, diantara semua batas atas dari himpunan S subset bilangan real e... misalnya u, w, y itu berada paling kiri dari semua

batas atas, jadi u itu merupakan supremum karna u itu paling kecil diantara semua batas atas

P3.18.5.54 : u merupakan paling kecil diantara semua batas atas? jadi kalo saya tunjuk y , y itu posisinya harus bagaimana terhadap u ?

S3.18.5.54 : kalo y ingin dijadikan supremum dia harus berada di sebelah kirinya u

P3.18.5.55 : tapi kalo saya mau tunjuk y , tapi saya mau tetap u sebagai batas atas terkecil

S3.18.5.55 : salahki kak

P3.18.5.56 : salah, kenapa?

S3.18.5.56 : karna y itu batas atasnya lebih besar daripada u

P3.18.5.57 : kalau di sini saya mau batas atas terkecilnya u , jadi harus bagaimana posisinya y

S3.18.5.57 : e ... kalo batas atas terkecil u , posisi y itu harus berada disebelah kanan u

P3.18.5.58 : kalau saya mau tunjuk sebarang batas atas yang lain, di mana posisinya itu?

S3.18.5.58 : batas atas sebarang yang lain harus berada di sisi yang paling kiri dari semua batas atas yang ada

P3.18.5.59 : supaya u tetap batas atas terkecil? Batas atas yang lain harus berada pada posisi yang mana?

S3.18.5.59 : di sebelah kanannya u

P3.18.5.60 : jadi yang paling kiri itu apa?

S3.18.5.60 : u

P3.18.5.61 : u ?

S3.18.5.61 : iya, tidak boleh ada batas atas yang lain yang paling kiri selain u

P3.18.5.62 : oh ... ya sedangkan infimum?

S3.18.5.62 : infimum adalah batas bawah terbesar artinya e .. misalnya diantara batas bawah ada w , y , z dari himpunan S subset bilangan real, w merupakan infimum karna w adalah batas bawah terbesar artinya w ini berada di sebelah paling kanan diantara semua batas bawah yang ada

P3.18.5.63 : jadi kalo saya misalnya ambil sebarang batas bawah, jika saya mau tetap w sebagai batas bawah terbesar maka batas bawah yang lain di posisi mana?

S3.18.5.63 : batas bawah yang lain harus berada di sebelah kiri w

P3.18.5.64 : kiri w ? jadi yang paling kanan itu siapa?

S3.18.5.64 : yang paling kanan itu w

P3.18.5.65 : nda boleh dia bersamaan dengan w ? tidak bisa sama posisi w dengan y ?

S3.18.5.65 : tidak boleh

P3.18.5.66 : tidak boleh?

S3.18.5.66 : iye

P3.18.5.67 : tidak boleh $w = y$?
 S3.18.5.67 : tidak
 P3.18.5.68 : konsep yang setelahnya maksimum?
 S3.18.5.68 : maksimum artinya anggota terbesar dari suatu himpunan
 P3.18.5.69 : anggota terbesar dari suatu himpunan? Himpunan yang mana?
 S3.18.5.69 : himpunan S subset bilangan real
 P3.18.5.70 : jadi yang mana coba maksimum, coba ditunjuk kalo di situ tadi di bagannya!
 S3.18.5.70 : ini ujung ... maksimum dia berada di sisi paling kanan semua anggota dari himpunan S
 P3.18.5.71 : tadi itu ada dibilang anggota dari suatu himpunan S subset R , yang mana yang benar?
 S3.18.5.71 : dari suatu himpunan S subset bilangan real, manami kah, ini ini merupakan maksimum (menunjuk), ini merupakan bagian dari anggota, harus menjadi anggota himpunan S
 P3.18.5.72 : himpunan S ?
 S3.18.5.72 : iya
 P3.18.5.73 : kan anda tulis adalah anggota dari suatu himpunan S subset R , jadi yang mana itu? Yang mana ... S subset R ataukah anggota himpunan S saja?
 S3.18.5.73 : astaga ... anggota himpunan S saja
 P3.18.5.74 : minimum?
 S3.18.5.74 : anggota terkecil dari suatu himpunan S subset R
 P3.18.5.75 : apa bedanya maksimum dan supremum?
 S3.18.5.75 : maksimum dan supremum
 P3.18.5.76 : he em (mengiyakan)
 S3.18.5.76 : maksimum itu harus menjadi anggota dari suatu himpunan, sedangkan supremum itu
 P3.18.5.77 : himpunan apa?
 S3.18.5.77 : harus menjadi anggota dari himpunan S subset bilangan real, kalo supremum bisa tidak menjadi anggota himpunan S subset bilangan real
 P3.18.5.78 : kalo minimum dan infimum?
 S3.18.5.78 : kalo minimum harus menjadi anggota terkecil dari himpunan S subset bilangan real, kalo infimum bisa saja tidak menjadi anggota terkecil dari himpunan S subset bilangan real
 P3.18.5.79 : jadi sama-sama anggotanya bilangan S subset R yah?
 S3.18.5.79 : maksudnya kak?
 P3.18.5.80 : infimum itu anggota dari himpunan apa?
 S3.18.5.80 : dari bilangan real, bisa menjadi anggota himpunan S , bisa saja juga tidak, yang jelas dia merupakan bagian dari bilangan real
 P3.18.5.81 : kalo minimum?
 S3.18.5.81 : kalo minimum harus menjadi anggota terkecil dari himpunan S

P3.18.5.82 : itu himpunan S lagi? Yang mana ini ditetapkan himpunan S atau himpunan S subset R
 S3.18.5.82 : himpunan s subset bilangan real
 P3.18.5.83 : oh begitu?
 S3.18.5.83 : iya
 P3.18.5.84 : itu tadi tidak tahu membedakan yah himpunan S dengan himpunan S subset R

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek mampu mendeskripsikan konsep-konsep yang terkait dengan lengkap dan mendalam, namun belum dapat menjelaskan secara simbolik. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.18.5.1; S3.18.5.2; S3.18.5.3; S3.18.5.4; S3.18.5.21; S3.18.5.23; S3.18.5.29; S3.18.5.38; S3.18.5.39; S3.18.5.52; S3.18.5.53; S3.18.5.62; S3.18.5.68; S3.18.5.74; S3.18.5.75; S3.18.5.76; S3.18.5.77 dan S3.18.5.78] atas pertanyaan [P3.18.5.1; P3.18.5.2; P3.18.5.3; P3.18.5.4; P3.18.5.21; P3.18.5.23; P3.18.5.29; P3.18.5.38; P3.18.5.39; P3.18.5.52; P3.18.5.53; P3.18.5.62; P3.18.5.68; P3.18.5.74; P3.18.5.75; P3.18.5.76; P3.18.5.77 dan P3.18.5.78] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara tersebut pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa, jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 19

P3.19.5.1 : berikan contoh himpunan bilangan yang memiliki batas atas dan batas bawah!
 S3.19.5.1 : contohnya himpunan bilangan bulat positif yang kurang dari atau samadengan 5
 P3.19.5.2 : yang memiliki yah batas bawah dan batas atas?

S3.19.5.2 : iya
 P3.19.5.3 : himpunan bilangan bulat positif yang kurang dari atau samadengan 5, jadi batas bawahnya bilangan bulat positif apa?
 S3.19.5.3 : 1
 P3.19.5.4 : 1?
 S3.19.5.4 : iye
 P3.19.5.5 : kalo 0? Bilangan bulat positif atau bagaimana?
 S3.19.5.5 : tidak ... bukan
 P3.19.5.6 : bukan?
 S3.19.5.6 : iye
 P3.19.5.7 : mulai dari 1?
 S3.19.5.7 : iye 1
 P3.19.5.8 : kalau bilangan bulat eh ... 5 yah, jadi batas bawahnya 1?
 S3.19.5.8 : batas bawah 1, batas atas 5
 P3.19.5.9 : batas atas 5, begitu?
 S3.19.5.9 : iye
 P3.19.5.10 : kalo batas bawahnya yang lain apa? Kan tadi di bilang batas bawah tidak punya eh ... banyak toh, tidak tunggal?
 S3.19.5.10 : bisa tunggal
 P3.19.5.11 : bisa tunggal batas bawah?
 S3.19.5.11 : iye bisa
 P3.19.5.12 : bisa?
 S3.19.5.12 : bisa tunggal
 P3.19.5.13 : bisa tunggal?
 S3.19.5.13 : bisa ... bisa tunggal dan bisa banyak
 P3.19.5.14 : bisa tunggal dan bisa banyak?
 S3.19.5.14 : iye
 P3.19.5.15 : yang mana benar ini bisa tunggal ... yang mana tetapkan ... tunggal atau banyak?
 S3.19.5.15 : (tak berkata-kata dan menarik nafas panjang) huh ...
 P3.19.5.16 : Ok, jadi batas bawahnya 1 saja?
 S3.19.5.16 : 1
 P3.19.5.17 : Yaitu 1?
 S3.19.5.17 : iya
 P3.19.5.18 : sedangkan batas atas?
 S3.19.5.18 : 5
 P3.19.5.19 : batas atas yang lain?
 S3.19.5.19 : 6, 7 ...
 P3.19.5.20 : kalo 5 setengah ($5\frac{1}{2}$)?
 S3.19.5.20 : ih, bukan bilangan bulat itu kak,
 P3.19.5.21 : oh, bukan bilangan bulat?
 S3.19.5.21 : iye

P3.19.5.22 : begitu?
 S3.19.5.22 : iye
 P3.19.5.23 : oh jadi harus bilangan bulat batas atasnya?
 S3.19.5.23 : iya (ragu-ragu)
 P3.19.5.24 : ok
 S3.19.5.24 : hehe ... iya harus bilangan bulat kak

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek mampu memberikan contoh yang benar dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.19.5.1; S3.19.5.3; S3.19.5.8; S3.19.5.10; S3.19.5.13; S3.19.5.19; S3.19.5.20 dan S3.19.5.23] atas pertanyaan [P3.19.5.1; P3.19.5.3; P3.19.5.8; P3.19.5.10; P3.19.5.13; P3.19.5.19; P3.19.5.20 dan P3.19.5.23] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 19 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 20

P3.20.5.1 : he em, ok nomor 20, himpunan bilangan bulat yang ... eh himpunan bilangan bulat kenapa ku baca jawabanta he ... he ... mmm iye... yang nomor 21 berikan contoh himpunan bilangan yang memiliki batas bawah...
 S3.20.5.1 : nomor 20 dulu kak
 P3.20.5.2 : oh ya ... ya, berikan contoh himpunan bilangan yang memiliki batas atas tapi tidak memiliki batas bawah
 S3.20.5.2 : himpunan bilangan pecahan yang kurang dari $\frac{1}{2}$
 P3.20.5.3 : pecahan yang kurang dari $\frac{1}{2}$? Himpunan bilangan pecahan
 S3.20.5.3 : yang kurang dari $\frac{1}{2}$
 P3.20.5.4 : yang kurang dari $\frac{1}{2}$?
 S3.20.5.4 : iye, banyak berderetan ke bawah kak yang mulai dari positif sampai negatif, nda kutau sampai mana ujungnya

P3.20.5.5 : iya?
 S3.20.5.5 : iya
 P3.20.5.6 : himpunan bilangan pecahan ...
 S3.20.5.6 : yang kurang dari $\frac{1}{2}$
 P3.20.5.7 : jadi batas bawahnya tidak ditau?
 S3.20.5.7 : iye nda bisa ditentukan karna banyak
 P3.20.5.8 : jadi ini himpunan bilangan pecahan ...
 S3.20.5.8 : yang kurang dari $\frac{1}{2}$
 P3.20.5.9 : bagaimana himpunan anunya ... simbolnya
 S3.20.5.9 : Misalnya ini X bilangan pecahan kurang dari $\frac{1}{2}$
 P3.20.5.10 : ... ya ...ya jadi batas bawahnya tidak diketahui,
 S3.20.5.10 : Iye
 P3.20.5.11 : batas atas?
 S3.20.5.11 : $\frac{1}{2}$
 P3.20.5.12 : batas atasnya hanya ... batas atas yang lain ada? Ada atau tidak?
 S3.20.5.12 : ada,
 P3.20.5.13 : apa itu?
 S3.20.5.13 : seper ... he ...he ... berapa lebih besar dari $\frac{1}{2}$... ha ... ha ...
 P3.20.5.14 : yang mana batas atasnya yang lain?
 S3.20.5.14 : masih banyak kak ha ... ha ...
 P3.20.5.15 : apa itu contohnya?
 S3.20.5.15 : yang lebih besar dari $\frac{1}{2}$ he ...he nda kutaui
 P3.20.5.16 : coba dihitung siapa tahu bisa didapat
 S3.20.5.16 : ih berapa di' ... oh $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$ dan lain-lain hi ... hi ...
 P3.20.5.17 : $\frac{3}{2}$ kan bilangan pecahan
 S3.20.5.17 : eh $\frac{4}{2}$ bukan
 P3.20.5.18 : begitu?
 S3.20.5.18 : iye
 P3.20.5.19 : kalo $\frac{1}{3}$?
 S3.20.5.19 : $\frac{1}{3}$... he ...he ... (sambil mengerjakan) tidak kak
 P3.20.5.20 : tidak?
 S3.20.5.20 : iye
 P3.20.5.21 : kenapa $\frac{1}{3}$ bukan batas atasnya?
 S3.20.5.21 : karna ... e ... $\frac{1}{3}$ lebih kecil dari pada $\frac{1}{2}$
 P3.20.5.22 : lebih kecil dari pada $\frac{1}{2}$?
 S3.20.5.22 : iye

P3.20.5.23 : jadi $\frac{1}{3}$ bukan batas atas?

S3.20.5.23 : bukan

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.20.5.2; S3.20.5.4; S3.20.5.7; S3.20.5.11; S3.20.5.14; S3.20.5.16; S3.20.5.19 dan S3.20.5.21] atas pertanyaan [P3.20.5.2; P3.20.5.4; P3.20.5.7; P3.20.5.11; P3.20.5.14; P3.20.5.16; P3.20.5.19 dan P3.20.5.21] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 20 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 21

P3.21.5.1 : ok, nomor 21, berikan contoh himpunan bilangan yang memiliki batas bawah tapi tidak memiliki batas atas!

S3.21.5.1 : contohnya himpunan bilangan asli yang lebih dari 1

P3.21.5.2 : kenapa tidak memiliki batas atas?

S3.21.5.2 : karna banyak bilangan asli di atasnya 1 kak

P3.21.5.3 : memang banyak tapi kenapa tidak bisa ditunjuk sebagai batas atas

S3.21.5.3 : karna tidak ada batasnya

P3.21.5.4 : ha ...

S3.21.5.4 : nda ada batasnya di atas, maksudnya tidak bisa ditunjuk salah satu ... e ... salah satu ... salah satu anggota bilangan asli yang paling kaaanan ... iya

P3.21.5.5 : kemudian batas bawahnya?

S3.21.5.5 : 1

P3.21.5.6 : 1?

S3.21.5.6 : iye

P3.21.5.7 : kenapa disebut batas bawahnya 1?

S3.21.5.7 : karna bilangan asli yang paling kiri itu 1

P3.21.5.8 : batas bawah yang lain?

S3.21.5.8 : nda adami... 1 ji kak
 P3.21.5.9 : 1 ji? Jadi batas bawah di sini samaji dengan batas bawah terbesar?
 S3.21.5.9 : iya
 P3.21.5.10 : iya?
 S3.21.5.10 : samaji kak
 P3.21.5.11 : jadi kontradiksiki tadi yang kita bilang bahwa batas bawah itu banyak
 S3.21.5.11 : ih tidak kak, karna anu ini berhubungan ... berhubung karna contohnya hanya 1 ji batas bawahnya jadi e ... apa ... seandainya misalnya toh kak, himpunan bilangan asli yang lebih dari 3 masih ada batas bawahnya 2 sama 1
 P3.21.5.12 : 2 sama 1?
 S3.21.5.12 : iye
 P3.21.5.13 : oh, begitu?
 S3.21.5.13 : iye

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.21.5.1; S3.21.5.2; S3.21.5.3; S3.21.5.5; S3.21.5.7; S3.21.5.8 dan S3.21.5.11] atas pertanyaan [P3.21.5.1; P3.21.5.2; P3.21.5.3; P3.21.5.5; P3.21.5.7; P3.21.5.8 dan P3.21.5.11] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 21 pada materi jenis-jenis bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional

Transkrip wawancara 5 nomor 22

P3.22.5.1 : nomor 22 lagi, berikan contoh himpunan bilangan yang tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah!
 S3.22.5.1 : contohnya himpunan bilangan bulat
 P3.22.5.2 : kenapa disebut himpunan bilangan bulat tidak memiliki batas atas dan tidak memiliki batas bawah?
 S3.22.5.2 : karna himpunan bilangan bulat itu terbagi atas 3 yaitu bulat positif, bulat negatif sama 0, bulat positif banyak ke atas eh ke kanan ... e

bulat negatif juga anggotanya kekiri sangat banyak tak terhingga sehingga tidak dapat ditunjuk salah satu anggotanya yang menjadi ... eh salah satu anggotanya paling kanan dan salah satu anggotanya yang paling kiri

P3.22.5.3 : jadi 0 bagaimanami?

S3.22.5.3 : 0 terjepitki kak bukan batas atas itu.

P3.22.5.4 : oh jadi himpunan bilangan bulat di'?

S3.22.5.4 : iye

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek mampu memberikan contoh yang benar dan mampu memberikan alasan. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.22.5.1 dan S3.22.5.3] atas pertanyaan [P3.22.5.1 dan P3.22.5.3] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 22 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.

Transkrip wawancara 5 nomor 23

P3.23.5.1 : nomor 23, Berikan contoh himpunan bilangan yang supremumnya ada tapi tidak memiliki infimum!

S3.23.5.1 : saya ambil dari contoh anuji kak ... contoh yang ... nomor brapa ini kak ... nomor 3 yaitu himpunan bilangan pecahan yang kurang dari $\frac{1}{2}$

P3.23.5.2 : kenapa disebut supremumnya $\frac{1}{2}$?

S3.23.5.2 : karna supremumnya itu berada e ... merupakan batas atas paling kiri

P3.23.5.3 : kalo $\frac{5}{6}$?

S3.23.5.3 : ededeh kak jangki kasika pecahan he ... he ...

P3.23.5.4 : ih anda sendiri yang ambil contoh pecahan

S3.23.5.4 : astaga ... he ... he ... berapa itu? 4, 5 x 6 lima puluh ededeh tiga puluh ... 0.5 ... 0.8 bukan kak bukan supremum, merupakan batas atas tapi bukan paling kiri

P3.23.5.5 : begitu?

S3.23.5.5 : iye

P3.23.5.6 : kalo $\frac{4}{7}$?

S3.23.5.6 : ededeh kak, ndakutau...
 P3.23.5.7 : jangan langsung menyerah masa pembagian tidak tahu
 S3.23.5.7 : eh 40 ... 7 ... 8 ... 3 ... bukan kak ... eh ... apa tadi $\frac{4}{7}$ di?
 P3.23.5.8 : $\frac{4}{7}$ sebagai apa?
 S3.23.5.8 : batas atas
 P3.23.5.9 : batas atas? Bukan batas atas terkecil?
 S3.23.5.9 : bukan
 P3.23.5.10 : bukan?
 S3.23.5.10 : iya, yang jelasnya $\frac{1}{2}$ batas atas terkecil, oh tidak ada lalomo pecahan

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.23.5.1; S3.23.5.2; S3.23.5.3; S3.23.5.4; S3.23.5.8; S3.23.5.9 dan S3.23.5.10] atas pertanyaan [P3.23.5.1; P3.23.5.2; P3.23.5.3; P3.23.5.4; P3.23.5.8; P3.23.5.9 dan P3.23.5.10] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 23 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 24

P3.24.5.1 : nomor 24, berikan contoh himpunan bilangan yang infimumnya ada tapi tidak memiliki supremum!
 S3.24.5.1 : himpunan bilangan asli yang lebih dari 1, samaji contohnya kak nomor 21
 P3.24.5.2 : apa maksudnya ini (menunjuk ujian tes tertulis yang lalu) ... pada tes terdahulu anda bilang himpunan bilangan asli tapi langsung saja, yang mana itu bilangan asli
 S3.24.5.2 : astaga ... salah itu kak
 P3.24.5.3 : salah?
 S3.24.5.3 : iye

P3.24.5.4 : mestinya apa?
 S3.24.5.4 : himpunan bilangan asli yang lebih ...
 P3.24.5.5 : kasih dalam kurungki di situ supaya saya tahu anda tambah
 to'?(subjek memperbaiki pekerjaannya).... Yang lebih dari 1?
 S3.24.5.5 : iye, bisa juga lebih dari 2
 P3.24.5.6 : infimumnya ada tapi tidak memiliki supremum?
 S3.24.5.6 : iye
 P3.24.5.7 : infimumnya ... yang lebih dari 1?
 S3.24.5.7 : iye yang lebih dari 1
 P3.24.5.8 : kenapa supremumnya tidak ada?
 S3.24.5.8 : karna nda ada batas atasnya kak
 P3.24.5.9 : kenapa? ... jadi infimumnya 1?
 S3.24.5.9 : iye
 P3.24.5.10 : kalo batas bawahnya?
 S3.24.5.10 : 1 juga
 P3.24.5.11 : nda ada yang lain?
 S3.24.5.11 : nda adami kak
 P3.24.5.12 : hanya 1 saja?
 S3.24.5.12 : 1 ji.
 P3.24.5.13 : mengapa?
 S3.24.5.13 : karna paling kecilmi itu 1 he ... he ...
 P3.24.5.14 : paling kecilmi itu 1?
 S3.24.5.1 4 : iye, anggota himpunan bilangan asli paling kecil 1

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 mampu memberikan contoh yang benar namun dengan alasan yang kurang tepat dan lengkap. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.24.5.1; S3.24.5.2; S3.24.5.4; S3.24.5.5; S3.24.5.8; S3.24.5.10; S3.24.5.11; S3.24.5.12 dan S3.24.5.13] atas pertanyaan [P3.24.5.1; P3.24.5.2; P3.24.5.4; P3.24.5.5; P3.24.5.8; P3.24.5.10; P3.24.5.11; P3.24.5.12 dan P3.24.5.13] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 24 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman relasional.

Transkrip wawancara 5 nomor 25

- P3.25.5.1 : ok, nomor 25, berikan contoh himpunan bilangan yang tidak memiliki supremum dan tidak memiliki infimum!
- S3.25.5.1 : himpunan bilangan bulat
- P3.25.5.2 : mengapa tidak memiliki supremum dan infimum?
- S3.25.5.2 : karna tidak mempunyai batas atas dan tidak mempunyai batas bawah
- P3.25.5.3 : tidak mempunyai batas atas dan tidak mempunyai batas bawah? Kenapa dikatakan tidak mempunyai batas atas dan tidak mempunyai batas bawah juga tidak mempunyai supremum dan infimum?
- S3.25.5.3 : karna supremum dan infimum dapat ditentukan ketika suatu himpunan itu mempunyai batas atas dan batas bawah
- P3.26.5.4 : yaitu batas bawah yang mana?
- S3.25.5.4 : batas atas terkecil, kalo supremum batas atas terkecil kalo infimum batas bawah yang terbesar

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 mampu memberikan contoh yang benar dan mampu memberikan alasan. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.25.5.1; S3.25.5.2; S3.25.5.3 dan S3.25.5.4] atas pertanyaan [P3.25.5.1; P3.25.5.2; P3.25.5.3 dan P3.25.5.4] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 25 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa jenis pemahaman subjek adalah pemahaman formal.

Transkrip wawancara 5 nomor 26

- P3.26.5.1 : nomor 26, diketahui $A = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Selidiki apakah himpunan A memiliki batas atas, batas bawah, supremum dan infimum!
- S3.26.5.1 : memiliki batas bawah, tidak memiliki batas atas
- P3.26.5.2 : memiliki batas bawah?
- S3.26.5.2 : iye
- P3.26.5.3 : batas bawahnya apa?
- S3.26.5.3 : $-\frac{1}{3}$
- P3.26.5.4 : $-\frac{1}{3}$ diambil dari apa ... didapat darimana?
- S3.26.5.4 : e ... $n = 1$
- P3.26.5.5 : $n = 1$?
- S3.26.5.5 : iya
- P3.26.5.6 : tidak ada batas bawah yang lain?
- S3.26.5.6 : tidak adami kak
- P3.26.5.7 : tidak ada batas bawah yang lain?
- S3.26.5.7 : nda adami
- P3.26.5.8 : batas atas?
- S3.26.5.8 : tidak bisa ditentukan
- P3.26.5.9 : kenapa tidak bisa ditentukan?
- S3.26.5.9 : karna n itu merupakan e ... bagian bilangan asli
- P3.26.5.10 : mana ... mana ...
- S3.26.5.10 : n ini kak n pangkatnya, n ini merupakan elemen bilangan asli, bilangan asli itu banyak kak, jadi tidak bisa ditentukan berapa yang ... e ... berapa batas atasnya
- P3.26.5.11 : begitu?
- S3.26.5.11 : iye
- P3.26.5.12 : begitu maksud anda?
- S3.26.5.12 : maksudku begitu
- P3.26.5.13 : supremumnya?
- S3.26.5.13 : supremumnya juga tidak ada karna tidak ada batas atas
- P3.26.5.14 : infimumnya?
- S3.26.5.14 : $-\frac{1}{3}$
- P3.26.5.15 : yakin tidak ada batas atasnya?
- S3.26.5.15 : yakin kak
- P3.26.5.16 : kenapa hanya $n = 1$ saja?
- S3.26.5.16 : ah..? apanya kak?
- P3.26.5.17 : kenapa n-nya = 1 saja?
- S3.26.5.17 : karna 1 itu merupakan anggota bilangan asli yang terkecil
- P3.26.5.18 : anggota bilangan asli yang terkecil

S3.26.5.18 : iye
 P3.26.5.19 : jadi kenapa tidak ambil yang lain?
 S3.26.5.19 : ini, ada $n = 2$, hasilnya $\frac{1}{5}$
 P3.26.5.20 : oh $\frac{1}{5}$?
 S3.26.5.20 : iye, $n = 3$ hasilnya $-\frac{1}{7}$, jadi yang paling kecil diantara semua ini adalah $-\frac{1}{3}$
 P3.26.5.21 : tapi tadi dibilang batas bawahnya $-\frac{1}{3}$?
 S3.26.5.21 : iye, karna paling kecil ini (menunjuk $-\frac{1}{3}$) paling kiri
 P3.26.5.22 : ya, jadi tidak adami lagi batas bawah yang lain?
 S3.26.5.22 : nda adami kak
 P3.26.5.23 : batas bawah $-\frac{1}{3}$ saja? (menanyakan lebih lanjut)
 S3.26.5.23 : emmm ... (berpikir) ... iye
 P3.26.5.24 : tidak ada yang lain batas bawahnya?
 S3.26.5.24 : nda adami kapang (ragu-ragu menjawab)
 P3.26.5.25 : kenapa bilang “*kapang*”, kenapa mungkin?
 S3.26.5.25 : (terdiam sejenak) nda adami kak, iniji
 P3.26.5.26 : oh jadi infimumnya kenapa ... infimumnya $-\frac{1}{3}$... kenapa?
 S3.26.5.26 : karna satuji batas bawahnya kak, jadi otomatis itumi menjadi infimum.

Dari transkrip di atas, terungkap bahwa dalam memahami Materi Sistem Bilangan Real I, Subjek S3 Subjek tidak mampu memberikan jawaban yang benar dengan langkah-langkah penyelidikan yang tidak memiliki alasan yang tepat. Hal ini diketahui melalui respon subjek [S3.26.5.2; S3.26.5.3; S3.26.5.4; S3.26.5.6; S3.26.5.8; S3.26.5.9; S3.26.5.13; S3.26.5.14; S3.26.5.17; S3.26.5.19; S3.26.5.20; S3.26.5.24 dan S3.26.5.26] atas pertanyaan [P3.26.5.2; P3.26.5.3; P3.26.5.4; P3.26.5.6; P3.26.5.8; P3.26.5.9; P3.26.5.13; P3.26.5.14; P3.26.5.17; P3.26.5.19; P3.26.5.20; P3.26.5.24 dan P3.26.5.26] yang diajukan oleh peneliti.

Setelah menganalisis hasil wawancara soal nomor 26 pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real, maka dapat disimpulkan bahwa subjek tidak memahami materi sifat kelengkapan. Dengan demikian, Subjek S3 tidak memahami konsep dalam menentukan batas atas, batas bawah, supremum dan infimum, sehingga tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga kategori pemahaman menurut Skemp.

3) Validasi Data dan Penarikan Kesimpulan tentang Pemahaman Subjek S3 dalam menyelesaikan Soal-soal pada Materi Sistem Bilangan Real

Untuk menguji validitas data pemahaman subjek S3 dalam menyelesaikan soal-soal pada materi Sistem Bilangan Real, maka selanjutnya dilakukan triangulasi untuk mencari kesesuaian data pemahaman subjek S3 terhadap soal-soal pada materi Sistem Bilangan Real pada tes uraian dan wawancara. Triangulasi yang dimaksud dilakukan seperti yang disajikan pada tabel berikut.

Tabel 4.13 Triangulasi Data Pemahaman Subjek S2 dalam Menyelesaikan Soal-soal pada Materi sistem bilangan real pada Tes Uraian dan Wawancara

No Soal	Triangulasi Metode untuk Subjek S3								Keterangan		
	Tes Uraian				Wawancara						
	TM	I	R	F	TM	I	R	F	S	KS	TS
1			✓				✓		✓		
2			✓				✓		✓		
3		✓				✓			✓		
4			✓				✓		✓		
5	✓				✓				✓		
6				✓				✓	✓		
7				✓	✓						✓
8	✓				✓				✓		
9	✓				✓				✓		
10		✓				✓			✓		
11		✓				✓			✓		
12		✓				✓			✓		
13			✓				✓		✓		
14		✓					✓			✓	
15	✓				✓				✓		
16			✓			✓				✓	
17	✓				✓				✓		
18			✓				✓		✓		
19			✓				✓		✓		
20			✓				✓		✓		
21			✓				✓		✓		
22		✓						✓			✓
23			✓				✓		✓		
24			✓				✓		✓		
25		✓						✓			✓
26	✓				✓				✓		

Keterangan:

TM : Tidak Memahami

I : Instrumental

R : Relasional

F : Formal

S : Sesuai: informasi yang diberikan pada tes uraian sama/sejalan dengan tes wawancara

KS : Kurang Sesuai : informasi yang diberikan berkurang atau bertambah pada tes uraian /tes wawancara

TS : Tidak Sesuai : informasi yang diberikan pada tes uraian tidak sama dengan tes wawancara

Berdasarkan tingkat kesesuaian yang ditunjukkan pada tabel triangulasi di atas diperoleh informasi sebagai berikut.

Subjek S3 menunjukkan bahwa ada 24 dari 26 soal sesuai (konsisten) dengan rincian: kategori pemahaman relasional ada 11 yang sesuai, kategori pemahaman instrumental ada 5 yang sesuai, kategori pemahaman formal ada 2 yang sesuai, sedangkan sisanya 6 soal tidak dipahami oleh Subjek S3. Mayoritas (11 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori pemahaman relasional. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa pemahaman Subjek S3 adalah pemahaman relasional.

B. Pembahasan

Pada bagian ini dibahas tentang hasil analisis deskriptif kuantitatif dan kualitatif. Hasil analisis tersebut meliputi: (1) respons mahasiswa terhadap penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*, (2) aktivitas mahasiswa dalam penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding*, (3) hasil belajar Analisis Real I, dan (4) jenis pemahaman mahasiswa terhadap materi sistem bilangan real.

Setelah itu, dibahas tentang konten yang dirasakan sulit oleh mahasiswa dalam tes diagnostik atau tes kemampuan awal. Konten yang dimaksud adalah topik-topik tertentu dalam tiap tes diagnostik. Hasil analisis deskriptif terhadap skor hasil tes diagnostik (aljabar elementer, logika, dan kalkulus I) yang ditunjukkan pada bagian hasil penelitian di atas merupakan kontribusi langsung dari kesulitan mahasiswa pada konten yang dimaksud.

Kemudian, dibahas tentang keterkaitan hasil analisis deskriptif kuantitatif terhadap hasil analisis deskriptif kualitatif. Keterkaitan yang dimaksud adalah dalam hal kontribusi hasil analisis deskriptif kuantitatif terhadap hasil analisis deskriptif kualitatif. Dengan kata lain, keterkaitan di sini berarti adanya kontribusi respons, aktivitas, dan hasil belajar mahasiswa terhadap jenis pemahaman mereka.

Selanjutnya, dibahas tentang temuan khusus. Temuan khusus yang dimaksud di sini adalah temuan dalam penelitian yang bukan merupakan fokus utama penelitian, tetapi sedikit banyaknya turut berkontribusi terhadap fokus penelitian.

Terakhir, dibahas tentang keterbatasan penelitian. Di sini dibahas tentang poin-poin yang merupakan kelemahan penelitian ini.

Berikut ini adalah uraiannya.

1. Hasil Analisis Deskriptif Kuantitatif dan Kualitatif

a. Respons Mahasiswa

Pada umumnya mahasiswa memberikan respons positif terhadap keseluruhan aspek-aspek pembelajaran di kelas melalui penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* setting pengajaran langsung. Hal ini ditunjukkan dengan jumlah mahasiswa sebanyak 45 orang atau 97,83% yang memberikan respons positif. Hal tersebut berarti bahwa mahasiswa membutuhkan penjelasan materi prasyarat sebelum memasuki materi sistem bilangan real dan mahasiswa menyukai pemberian bantuan (*scaffolding*) oleh dosen. Sikap positif tersebut mengakibatkan mahasiswa bersemangat untuk belajar analisis real I. Hal ini sesuai dengan pendapat NCTM (Nurwahidah, 2010: 137), salah satu komponen yang menentukan meningkatnya hasil belajar yaitu (1) sikap positif terhadap matematika, (2) respon siswa terhadap kebaruan aspek-aspek pembelajaran telah memenuhi kriteria respons positif.

Berikut ini respon seluruh mahasiswa kelas V-D yang dilihat pada lembar respons mahasiswa secara mendetail setelah mengikuti perkuliahan.

1.a Sebanyak 82.61% atau sebanyak 38 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa suasana belajar dikelas menyenangkan karena alasan pedagogis. Misalnya, mahasiswa mengatakan bahwa suasana belajar menyenangkan karena dosen menyampaikan materi dengan jelas dan terstruktur, membantu jika mahasiswa mendapatkan kesulitan sehingga mahasiswa mudah memahami materi yang diajarkan. Ada juga yang mengatakan bahwa suasana belajar

menyenangkan karena proses belajar mengajar dilakukan dengan santai, diselingi dengan candaan, tetapi tetap serius menghadapi perkuliahan. Di antara mahasiswa itu, ada yang berpendapat bahwa suasana belajar di kelas menyenangkan, tetapi alasan yang diberikan tidak jelas atau tidak relevan dengan maksud pertanyaan. Misalnya, mahasiswa mengatakan bahwa suasana belajar menyenangkan, karena mata kuliah Analisis Real I adalah salah satu di antara mata kuliah-mata kuliah yang bermanfaat bagi mahasiswa. Ada juga yang mengatakan bahwa suasana belajar menyenangkan karena jika kita ingin mendapatkan ilmu yang bermanfaat maka hati harus menerima dengan ikhlas. Selain itu, ada yang mengatakan bahwa suasana belajar menyenangkan tapi kadang-kadang membuat mahasiswa jenuh karena waktu belajar yang lama. Kemudian, juga ada yang mengatakan bahwa suasana belajar menyenangkan jika mahasiswa yang lain tidak ribut dan tidak panas, tetapi kalau mahasiswa yang lain ribut dan panas, suasana menjadi tidak menyenangkan. Ada juga yang mengatakan bahwa suasana belajar menyenangkan, karena dapat menjadi olahraga di siang hari.

- 1.b Sebanyak 17.39% atau sebanyak 8 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa suasana belajar di kelas tidak menyenangkan karena alasan alokasi waktu perkuliahan tiap pertemuan, situasi dan kondisi lingkungan perkuliahan, serta kesamaan hak mahasiswa dalam kelas. Misalnya, mahasiswa mengatakan bahwa suasana belajar tidak menyenangkan karena terlalu lama di kelas sehingga bosan.

Ada yang mengatakan bahwa suasana belajar tidak menyenangkan karena cuaca yang panas dan keributan yang diakibatkan oleh banyaknya mahasiswa lain yang lalu lalang di depan kelas, kondisi ruangan yang panas karena kuliah kebanyakan dilakukan pada saat siang hari atau sore hari. Selain itu, ada yang mengatakan bahwa suasana belajar tidak menyenangkan, karena terkesan dosen hanya memperhatikan mahasiswa tertentu yang dianggap pintar, sehingga mahasiswa yang merasa tidak diperhatikan lebih banyak main-main di kelas.

2.a Sebanyak 97.83% atau sebanyak 45 orang dari 46 mahasiswa yang setuju jika dosen menjelaskan materi-materi prasyarat tertentu yang dibutuhkan mahasiswa karena alasan pentingnya materi tersebut, belum terpahaminya materi tersebut, dan relevansi materi tersebut dengan materi Sistem Bilangan Real. Misalnya, mayoritas mahasiswa mengatakan setuju, karena materi prasyarat sangat diperlukan untuk memahami materi selanjutnya. Ada juga, karena materi yang dipelajari memang belum jelas bagi mahasiswa tersebut sehingga diperlukan materi prasyarat. Alasan yang lain adalah karena sesuai dengan mata kuliah tersebut.

2.b Sebanyak 2.17% atau sebanyak 1 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa tidak setuju jika dosen menjelaskan materi-materi prasyarat tertentu yang dibutuhkan mahasiswa, namun alasan yang diberikan maksudnya tidak jelas. Misalnya, mahasiswa tersebut mengatakan bahwa tidak setuju, karena tidak ada salahnya asalkan dosen yang bersangkutan dapat menjelaskan dengan baik.

3.a Sebanyak 97,78% atau sebanyak 45 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa setuju jika pemberian bantuan oleh dosen, baik secara individu, maupun klasikal apabila mahasiswa mengalami kesulitan. Misalnya, mayoritas mengatakan bahwa karena banyak mahasiswa mengalami kesulitan dengan materi Sistem Bilangan Real, sehingga sangat dibutuhkan bantuan dari dosen. Ada juga yang mengatakan bahwa dengan bantuan dosen, mahasiswa akan lebih mudah menyelesaikan soal. Selain itu, ada yang mengatakan setuju, tetapi alasan tidak jelas. Ada juga yang mengatakan bahwa bantuan dosen akan membuat mahasiswa termotivasi untuk belajar. Kemudian, ada yang mengatakan bahwa bantuan dosen akan mempermudah mahasiswa memahami materi. Ada juga yang mengatakan bahwa bantuan dosen akan dapat mengaktifkan mahasiswa. Ada yang mengatakan bahwa dengan memberikan bantuan, berarti dosen aktif dalam mengajar dan tidak egois.

3.b Sebanyak 2.17% atau sebanyak 1 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa tidak setuju jika pemberian bantuan oleh dosen baik secara individu maupun klasikal apabila mahasiswa mengalami kesulitan. Misalnya, mahasiswa tersebut mengatakan bahwa tidak setuju, karena baginya gerah tak akan padam dengan kata dan motivasi, (mahasiswa ini bermasalah dengan kondisi ruangan yang panas)

4.a Sebanyak 97,83% atau sebanyak 45 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa setuju jika dilakukan pemberian latihan mandiri oleh dosen di kelas.

Misalnya, mahasiswa tersebut mengatakan bahwa setuju, karena sebagai latihan untuk mengerjakan soal dengan mandiri. Ada yang mengatakan karena mahasiswa bisa lebih paham tentang materi yang dipelajari. Kemudian ada juga yang mengatakan karena bisa digunakan sebagai alat evaluasi bagi mahasiswa untuk mengetahui sejauh mana pemahamannya terhadap materi Sistem Bilangan Real. Ada juga yang setuju diberikan beberapa soal tapi jika mereka menemui kesulitan bisa langsung mendapatkan bimbingan. Lalu ada lagi yang mengatakan karena dapat memotivasi mahasiswa untuk belajar.

4.b Sebanyak 2,17% atau sebanyak 1 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa tidak setuju jika dilakukan pemberian latihan mandiri oleh dosen di kelas karena soal latihan yang diberikan masih belum dipahami

5.a Sebanyak 97,83% atau sebanyak 45 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa setuju jika dilakukan pemberian tugas-tugas yang diberikan oleh dosen untuk diselesaikan di rumah. Mayoritas mahasiswa mengatakan bahwa setuju, karena dapat mengingatkan kembali terhadap materi yang telah dipelajari di kelas dan terlatih untuk menyelesaikan soal, kemudian ada juga yang mengatakan karena dengan adanya tugas-tugas yang diselesaikan di rumah maka akan membuat mahasiswa lebih giat belajar sehingga lebih banyak waktu untuk belajar di rumah, lalu ada yang mengatakan karena bisa digunakan sebagai alat evaluasi untuk mengukur kemampuan mahasiswa.

5.b Sebanyak 2,17% atau sebanyak 1 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa tidak setuju jika dilakukan pemberian tugas-tugas yang diberikan oleh dosen untuk diselesaikan di rumah. Mahasiswa tersebut tidak memberikan alasannya.

6.a Sebanyak 89,13% atau sebanyak 41 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa setuju jika mahasiswa mengalami kemajuan setelah mengikuti perkuliahan. Misalnya, mayoritas mahasiswa tersebut mengatakan adanya kemajuan seperti memahami materi prasyarat dan materi Analisis Real, ada juga yang mengatakan sudah mengetahui aksioma pada sifat aljabar, kemudian ada juga yang berpendapat bahwa mahasiswa sudah bisa mengetahui cara pembuktian teorema, mahasiswa telah dapat menyelesaikan soal dan ada juga yang mengatakan mahasiswa lebih giat belajar dan memanfaatkan waktu dengan baik untuk belajar dan mengikuti perkuliahan.

6.b Sebanyak 11,87% atau sebanyak 5 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa tidak setuju jika mahasiswa mengalami kemajuan setelah mengikuti perkuliahan. Misalnya, ada yang mengatakan, karena mahasiswa kurang mengerti dengan materi Sistem Bilangan Real yang sulit untuk dipahami dan sisanya tidak memberikan alasan.

7.a Sebanyak 86,96% atau sebanyak 40 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa setuju jika mahasiswa merasa termotivasi untuk lebih giat belajar setelah

mengikuti perkuliahan. Misalnya dengan mengatakan karena pemberian tugas lanjutan membuat saya termotivasi dan merasa tertantang untuk mengerjakannya, lalu ada juga yang beralasan karena dengan mengikuti perkuliahan saya lebih banyak ingin tahu tentang materi yang disampaikan, lalu ada lagi yang mengatakan pembelajaran dilaksanakan secara sistematis, jelas dan menarik, kemudian beberapa orang mengatakan karena dosen memberikan semangat untuk lebih giat belajar dan materi lebih terperinci dan yang lainnya karena mata kuliah ini berkaitan dengan mata kuliah yang lain

7.b Sebanyak 13,04% atau sebanyak 6 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa tidak setuju jika mahasiswa merasa termotivasi untuk lebih giat belajar setelah mengikuti perkuliahan. Misalnya dengan mengatakan mereka ragu-ragu karena terkadang mata kuliah Analisis Real I lumayan sulit dan menantang, sehingga ada materi yang sulit dipahami, kemudian ada yang mengatakan biasa-biasa saja seperti perkuliahan pada umumnya, kemudian alasannya karena jenuh, alasan lain mahasiswa mengatakan masih lebih tinggi keinginan untuk main-main dibanding belajar dan ada yang berpendapat mahasiswa tidak mendapat apa-apa pada perkuliahan

8.a Sebanyak 80,43% atau sebanyak 37 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa setuju jika cara perkuliahan seperti ini diterapkan pada mata kuliah lain. Misalnya dengan mengatakan karena sistem pengajarannya (strateginya) menggunakan *scaffolding* yang dapat membantu mahasiswa jika tidak

mengetahui atau memahami materi perkuliahan, kemudian ada lagi yang mengatakan karena cocok menggunakan cara seperti ini dengan materi mata kuliah pada jurusan matematika karena terdapat kesamaan konsep, lalu ada yang berpendapat karena selama ini perkuliahan hanya sebatas menggugurkan kewajiban saja dan mengharapkan honor mengajar, kemudian ada lagi yang mengatakan karena mudah dipahami dan adanya proses belajar timbal balik antara dosen dan mahasiswa sehingga mahasiswa menjadi lebih aktif, lalu alasan lain karena menyenangkan sehingga semangat/rajin ke kampus, alasan yang lain karena termotivasi untuk kuliah, ada juga yang berpendapat waktu yang ada dimanfaatkan semaksimal mungkin, kemudian ada yang mengatakan selama bermanfaat bagi diri saya dan orang lain kenapa tidak diterapkan pada mata kuliah lain dan ada juga yang tidak memberikan alasan

- 8.b Sebanyak 19,57% atau sebanyak 9 orang dari 46 mahasiswa yang berpendapat bahwa tidak setuju jika cara perkuliahan seperti ini diterapkan pada mata kuliah lain. Misalnya dengan mengatakan karena belum tentu semua mata kuliah dapat diterapkan metode seperti ini karena tergantung materi yang akan diajarkan dan kondisi mahasiswanya, ada juga yang mengatakan karena membuat mahasiswa jenuh karena waktu kuliah yang terlalu lama, sebaiknya metode pembelajarannya dapat divariasikan. Lalu ada juga yang berpendapat bahwa akan lebih efektif jika ada cara perkuliahan yang dapat meredam gerah dan keringat.

Berdasarkan data angket respons mahasiswa maka ditinjau secara umum respons mahasiswa terhadap aspek-aspek pembelajaran dengan penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* setting pengajaran langsung cenderung positif.

b. Aktivitas Mahasiswa

Berdasarkan hasil analisis deskriptif untuk aktivitas mahasiswa diperoleh bahwa pada umumnya, rata-rata persentase aktivitas mahasiswa untuk ketiga subjek penelitian dalam lima pertemuan dapat memenuhi kriteria waktu ideal.

Pada pertemuan I, subjek S1 lebih banyak memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen dan melakukan setiap instruksi yang diberikan oleh dosen tanpa adanya masalah karena tidak mengerti. Subjek S2 lebih banyak memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen dan menyelesaikan masalah/tugas mandiri yang diberikan oleh dosen. Subjek S3 lebih banyak memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen kemudian mengerjakan setiap instruksi yang diberikan oleh dosen dan mengerjakan latihan. Dari ketiga subjek penelitian, Subjek S1 melakukan aktivitas di luar kegiatan perkuliahan, tetapi Subjek S2 adalah yang paling banyak melakukan aktivitas di luar kegiatan perkuliahan. Sedangkan, S3 samasekali tidak melakukan aktivitas di luar kegiatan perkuliahan.

Pada pertemuan II, subjek S1 lebih banyak memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen, mengerjakan latihan, dan menyelesaikan tugas mandiri. Subjek S2 lebih banyak mengerjakan setiap instruksi yang diberikan oleh dosen dan merespon dengan baik bantuan yang diberikan oleh dosen. Subjek S3 lebih banyak memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen dan

mengerjakan setiap instruksi yang diberikan oleh dosen. Dari ketiga subjek penelitian, Subjek S1 melakukan aktivitas di luar kegiatan perkuliahan, tetapi Subjek S3 adalah yang paling banyak melakukan aktivitas di luar kegiatan perkuliahan. Sedangkan, Subjek S2 samasekali tidak melakukan aktivitas di luar kegiatan perkuliahan.

Pada pertemuan III, subjek S1 lebih banyak menyelesaikan masalah/tugas mandiri, memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen, kemudian memberikan jawaban lisan terhadap pertanyaan yang diberikan oleh dosen. Subjek S2 lebih banyak memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen dan menyelesaikan masalah/tugas mandiri. Subjek S3 lebih banyak memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen, mengerjakan latihan, menyelesaikan tugas mandiri, mengerjakan setiap instruksi yang diberikan oleh dosen, dan merespon dengan baik bantuan yang diberikan dosen. Dari ketiga subjek penelitian, Subjek S1 tidak menunjukkan adanya aktivitas di luar perkuliahan. Sedangkan, Subjek S2 dan S3 menunjukkan kuantitas yang sama dalam hal melakukan aktivitas di luar kegiatan perkuliahan.

Pada pertemuan IV, subjek S1 lebih banyak menyelesaikan masalah/tugas mandiri dan mengerjakan setiap instruksi yang diberikan oleh dosen. Subjek S2 lebih banyak memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen dan menyelesaikan masalah/tugas mandiri. Subjek S3 lebih banyak memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen. Dari ketiga subjek penelitian, Subjek S3 melakukan aktivitas di luar kegiatan perkuliahan, tetapi Subjek S1 adalah yang

paling banyak melakukan aktivitas di luar kegiatan perkuliahan. Sedangkan, S2 samasekali tidak menunjukkan adanya aktivitas di luar perkuliahan.

Pada pertemuan V, Subjek S1 lebih banyak menyelesaikan masalah/tugas mandiri, memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen, dan memberikan jawaban lisan terhadap pertanyaan yang diberikan dosen. Subjek S2 lebih banyak menyelesaikan masalah/tugas mandiri dan memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen. Subjek S3 lebih banyak memperhatikan dengan baik materi yang dijelaskan oleh dosen. Dari ketiga subjek penelitian, Subjek S1 dan S3 menunjukkan kuantitas yang sama dalam hal aktivitas di luar kegiatan perkuliahan, tetapi Subjek S2 adalah yang paling banyak melakukan aktivitas di luar kegiatan perkuliahan.

c. Hasil Belajar Analisis Real I

Berdasarkan hasil penelitian telah diperoleh rata-rata hasil belajar mahasiswa berada pada kualifikasi rendah dengan mahasiswa yang mendapatkan skor rendah sebanyak 43 orang (92%), skor sedang 3 orang (6%) dan skor tinggi 1 orang (2%) dan ketuntasan secara klasikal tidak tercapai. Hal ini disebabkan karena menurut tes diagnostik berdasarkan Aljabar elementer, logika matematika dan kalkulus I juga berada kualifikasi rendah. Namun bukan berarti bahwa penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian scaffolding tidak mempunyai peran untuk meningkatkan hasil belajar mahasiswa, setidaknya mahasiswa telah memiliki minat untuk mempelajari mata kuliah ini dan memberi solusi sementara yaitu pemberian scaffolding disesuaikan dengan kendala yang dihadapi.

Berdasarkan fakta dan pengalaman dosen-dosen, mata kuliah Analisis Real merupakan salah satu mata kuliah yang paling sulit untuk dilulusi oleh mahasiswa karena pada materi Analisis Real I bukan hanya materi prasyarat yang seharusnya telah dikuasai namun diperlukan keterampilan untuk membuktikan dan memecahkan soal-soal mengenai konsep dan prinsip yang kompleks.

d. Jenis Pemahaman Mahasiswa terhadap Materi Sistem Bilangan Real

Pada Subjek S1 menunjukkan bahwa ada 23 dari 26 soal sesuai (konsisten) dengan rincian: kategori pemahaman relasional ada 12 soal (3 soal pada materi jenis-jenis bilangan real, 1 soal materi pembuktian bilangan rasional, 1 soal materi sifat urutan pada bilangan real dan 7 soal materi sifat kelengkapan pada bilangan real) yang sesuai, kategori pemahaman instrumental ada 3 soal yang sesuai pada materi jenis-jenis bilangan real, kategori pemahaman formal ada 1 soal pada materi jenis-jenis bilangan real yang sesuai, sedangkan sisanya 6 soal (5 soal pada materi jenis-jenis bilangan real dan 1 soal pada materi sifat kelengkapan) tidak dipahami oleh Subjek S1. Mayoritas (12 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori pemahaman relasional. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa pemahaman Subjek S1 adalah pemahaman relasional.

Pada Subjek S2 menunjukkan bahwa ada 21 dari 26 soal sesuai (konsisten) dengan rincian: kategori pemahaman relasional ada 3 soal (1 soal pada materi jenis-jenis bilangan real dan 2 soal pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real) yang sesuai, kategori pemahaman instrumental ada 5 soal (3 soal pada materi jenis-jenis

bilangan real, 1 soal pada materi sifat aljabar pada bilangan real dan 1 soal pada sifat kelengkapan pada bilangan real) yang sesuai, kategori pemahaman formal ada 1 soal pada materi jenis-jenis bilangan real yang sesuai, sedangkan sisanya 12 soal (7 soal pada materi jenis-jenis bilangan real, 1 soal pada materi pembuktian bilangan rasional, 1 soal pada materi sifat urutan pada bilangan real dan 3 soal pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real) tidak dipahami oleh Subjek S2. Mayoritas (12 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori tidak memahami soal. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa pemahaman Subjek S2 tidak termasuk ke dalam salah satu dari ketiga kategori pemahaman.

Pada Subjek S3 menunjukkan bahwa ada 21 dari 26 soal sesuai (konsisten) dengan rincian: kategori pemahaman relasional ada 10 soal (3 soal pada materi jenis-jenis bilangan real, 1 soal pada materi sifat aljabar pada bilangan real dan 6 soal pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real) yang sesuai, kategori pemahaman instrumental ada 4 soal pada materi jenis-jenis bilangan real yang sesuai, kategori pemahaman formal ada 1 soal pada materi jenis-jenis bilangan real yang sesuai, sedangkan sisanya 6 soal (3 soal pada materi jenis-jenis bilangan real, 1 soal pada materi pembuktian bilangan rasional, 1 soal pada materi sifat urutan pada bilangan real dan 1 soal pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real) tidak dipahami oleh Subjek S3. Mayoritas (11 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori pemahaman relasional. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa pemahaman Subjek S3 adalah pemahaman relasional.

2. Konten yang Dirasakan Sulit oleh Mahasiswa dalam Tes Diagnostik

Konten mata kuliah dalam tes diagnostik yang diakomodasi dalam penelitian ini ada 3 (tiga), yaitu aljabar elementer, logika matematika, dan kalkulus I. Mahasiswa merasa kesulitan pada masing-masing konten dalam mata kuliah tersebut. Berikut ini adalah uraiannya.

a. Aljabar Elementer

Pada konten ini, mahasiswa kesulitan dalam: mencari KPK dan FPB; melakukan operasi pecahan; mengubah pecahan ke bentuk notasi ilmiah; memecahkan persamaan dan pertidaksamaan linear; menentukan himpunan penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan linear; melakukan pemfaktoran polinomial; menyederhanakan bentuk rasional; mencari bentuk akar paling sederhana; menyelesaikan persamaan akar kuadrat; menentukan akar-akar persamaan kuadrat; serta menggambar grafik fungsi aljabar.

b. Logika Matematika

Pada konten ini, mahasiswa kesulitan dalam menentukan negasi dari pernyataan: berkuantor, implikasi, dan biimplikasi. Selain itu, mahasiswa juga kesulitan dalam menentukan kontraposisi dari pernyataan implikasi dan biimplikasi.

c. Kalkulus I

Pada konten ini, mahasiswa kesulitan dalam: mengubah bilangan desimal berulang menjadi bentuk bilangan rasional; membedakan bilangan rasional dan irrasional; mencari nilai dari suatu variabel yang memenuhi ketaksamaan dan

menyatakan jawabannya dalam notasi selang; mencari delta yang bergantung pada epsilon; serta menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak.

3. Keterkaitan Hasil Analisis Deskriptif Kuantitatif terhadap Hasil Analisis Deskriptif Kualitatif

Berdasarkan hasil analisis deskriptif kuantitatif, diketahui bahwa secara umum, respons mahasiswa adalah positif, aktivitas mahasiswa berada pada kriteria waktu ideal, skor hasil tes diagnostik atau tes kemampuan awal secara umum berada pada kualifikasi rendah, dan hasil belajar berada pada kualifikasi rendah. Sedangkan, khusus untuk hasil analisis deskriptif kualitatif terhadap ketiga subjek penelitian, diketahui bahwa Subjek S1 dan S3 memiliki jenis pemahaman yang sama, yaitu pemahaman relasional. Lain halnya dengan subjek S2, dia bahkan tidak termasuk ke dalam salah satu dari tiga jenis pemahaman.

Sebenarnya dalam perkuliahan, dosen sebagai peneliti telah menyajikan materi secara hierarkis yang disertai dengan pemberian *scaffolding*. Tetapi, hasil belajar mahasiswa masih berada pada kualifikasi rendah dan jenis pemahaman tertinggi subjek penelitian hanya sampai pada pemahaman relasional, tidak sampai pada pemahaman formal. Bahkan, dari tiga subjek penelitian, ada yang tidak termasuk ke dalam salah satu di antara jenis-jenis pemahaman yang dikemukakan oleh Skemp.

Setelah mencermati kedua hasil analisis dan melakukan refleksi terhadap performa mahasiswa selama berlangsungnya seluruh rangkaian penelitian peneliti yakin bahwa rendahnya kualifikasi hasil belajar dan pencapaian jenis pemahaman

mahasiswa tidak dapat dilepaskan dari skor hasil tes diagnostik yang secara umum juga rendah. Meskipun, aktivitas mahasiswa secara umum berada pada waktu ideal dan menunjukkan sikap positif terhadap pembelajaran dengan pendekatan hierarki belajar Gagne yang disertai pemberian *scaffolding*.

4. Temuan khusus

Temuan khusus yang dimaksud di sini adalah temuan dalam penelitian yang bukan merupakan fokus utama penelitian, tetapi sedikit banyaknya turut berkontribusi terhadap fokus penelitian. Temuan khusus yang dimaksud adalah sebagai berikut.

1. Ditinjau dari sisi *interest* terhadap pelajaran ketika masih duduk di bangku sekolah, peneliti mendapatkan informasi bahwa Subjek S1 menyenangi matematika sejak duduk di bangku SD. Subjek S2 lebih senang fisika daripada matematika. Sedangkan, Subjek S3 sebenarnya lebih menyukai pelajaran kimia daripada pelajaran matematika ketika mereka masih berada di SMA..
2. Ditinjau dari sisi hobi atau kegemaran, peneliti memperoleh informasi bahwa Subjek S1 suka membaca, mendengarkan lagu (*wali band*), karena dapat mengambil manfaat dari lagu tersebut, khususnya lagu tobat maksiat (tomat). Subjek S2 lebih menyukai aktivitas bersosialisasi melalui *broadcasting* informasi *on air* via radio, lebih suka kegiatan yang langsung terjun ke lapangan, tidak terlalu suka membaca, suka hal yang baru dan menarik. Sedangkan, Subjek S3 senang membaca buku, *browsing* internet, membaca artikel, membaca buku-buku motivasi, dan menyukai acara Golden Ways: Mario Teguh.

5. Keterbatasan Penelitian

Keterbatasan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk mengetahui jenis pemahaman subjek penelitian, seharusnya wawancara dilakukan pada tiap pertemuan setiap selesai perkuliahan. Dalam penelitian ini, peneliti terkendala pada jadwal perkuliahan subjek penelitian yang selalu bertepatan dengan jadwal wawancara yang telah direncanakan. Akibatnya, peneliti mengadakan wawancara di luar perencanaan, yaitu pada waktu luang subjek.
2. Observasi terhadap aktivitas mahasiswa dilakukan terbatas hanya untuk mengukur secara kuantitatif. Dalam penelitian ini, tidak ada pengukuran kualitas aktivitas dan faktor yang mempengaruhi performa mahasiswa dalam perkuliahan, sehingga hasil pengamatan belum mendeskripsikan penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian *scaffolding* secara utuh.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang diuraikan pada Bab IV di depan, peneliti menyimpulkan sebagai berikut.

1. Respons Mahasiswa cenderung positif terhadap penerapan hierarki belajar Gagne dan pemberian scaffolding setting pengajaran langsung pada mata kuliah analisis real I
2. Aktivitas Mahasiswa pada perkuliahan Analisis Real I telah memenuhi kriteria waktu ideal, ini berarti semua aktivitas mahasiswa secara umum sesuai dengan yang diharapkan.
3. Hasil analisis terhadap hasil belajar mahasiswa menunjukkan bahwa frekuensi terbesar skor Analisis Real pada materi Sistem Bilangan Real mahasiswa berada dalam kualifikasi “rendah”. Jumlah mahasiswa yang memiliki skor Analisis Real pada materi Sistem Bilangan Real rendah 43 orang (92%), sedang 3 orang (6%), dan tinggi 1 orang (2%).
4. Hasil analisis terhadap pemahaman mahasiswa terhadap materi analisis real I menunjukkan bahwa:

Berdasarkan tingkat kesesuaian yang ditunjukkan dalam tabel triangulasi pada Bab IV diperoleh informasi sebagai berikut.

Pada Subjek S1 menunjukkan bahwa ada 23 dari 26 soal sesuai (konsisten) dengan rincian: kategori pemahaman³⁹⁹ional ada 12 soal (3 soal pada materi jenis-jenis bilangan real, 1 soal materi pembuktian bilangan rasional, 1 soal materi sifat urutan pada bilangan real dan 7 soal materi sifat kelengkapan pada bilangan real) yang sesuai, kategori pemahaman instrumental ada 3 soal yang sesuai pada materi jenis-jenis bilangan real, kategori pemahaman formal ada 1 soal pada materi jenis-

jenis bilangan real yang sesuai, sedangkan sisanya 6 soal (5 soal pada materi jenis-jenis bilangan real dan 1 soal pada materi sifat kelengkapan) tidak dipahami oleh Subjek S1. Mayoritas (12 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori pemahaman relasional. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa pemahaman Subjek S1 adalah pemahaman relasional.

Pada Subjek S2 menunjukkan bahwa ada 21 dari 26 soal sesuai (konsisten) dengan rincian: kategori pemahaman relasional ada 3 soal (1 soal pada materi jenis-jenis bilangan real dan 2 soal pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real) yang sesuai, kategori pemahaman instrumental ada 5 soal (3 soal pada materi jenis-jenis bilangan real, 1 soal pada materi sifat aljabar pada bilangan real dan 1 soal pada sifat kelengkapan pada bilangan real) yang sesuai, kategori pemahaman formal ada 1 soal pada materi jenis-jenis bilangan real yang sesuai, sedangkan sisanya 12 soal (7 soal pada materi jenis-jenis bilangan real, 1 soal pada materi pembuktian bilangan rasional, 1 soal pada materi sifat urutan pada bilangan real dan 3 soal pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real) tidak dipahami oleh Subjek S2. Mayoritas (12 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori tidak memahami soal. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa pemahaman Subjek S2 tidak termasuk ke dalam salah satu dari ketiga kategori pemahaman.

Pada Subjek S3 menunjukkan bahwa ada 21 dari 26 soal sesuai (konsisten) dengan rincian: kategori pemahaman relasional ada 10 soal (3 soal pada materi jenis-jenis bilangan real, 1 soal pada materi sifat aljabar pada bilangan real dan 6 soal pada

materi sifat kelengkapan pada bilangan real) yang sesuai, kategori pemahaman instrumental ada 4 soal pada materi jenis-jenis bilangan real yang sesuai, kategori pemahaman formal ada 1 soal pada materi jenis-jenis bilangan real yang sesuai, sedangkan sisanya 6 soal (3 soal pada materi jenis-jenis bilangan real, 1 soal pada materi pembuktian bilangan rasional, 1 soal pada materi sifat urutan pada bilangan real dan 1 soal pada materi sifat kelengkapan pada bilangan real)tidak dipahami oleh Subjek S3. Mayoritas (11 dari 26) dari jawaban yang sesuai itu berada dalam kategori pemahaman relasional. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa pemahaman Subjek S3 adalah pemahaman relasional.

B. Saran

Berdasarkan hasil penelitian disarankan beberapa hal sebagai berikut.

1. Sebelum memprogramkan mata kuliah analisis real, seharusnya mahasiswa telah melulusi mata kuliah prasyarat, seperti: kalkulus, aljabar elementer, dan pengantar dasar matematika.
2. Lingkungan perkuliahan perlu diperhatikan agar senantiasa kondusif. Ini didasarkan pada respon mahasiswa.
3. Pembatasan jumlah mahasiswa perlu dilakukan agar proses belajar mengajar menjadi lebih efektif.

DAFTAR PUSTAKA

- Aquino, G. V. 1997. *Teaching Models, Strategies and Skills*. Manila: Rex Book Store, Inc.
- Arends, R. I. 2012. *Learning to Teach (Ninth Edition)*. New York: The Mc Graw-Hill Companies.
- _____. 2000. *Learning to Teach*. New York: The Mc Graw-Hill Companies.
- Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. 2000. *Introduction to Real Analysis (Third Edition)*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Bartle, R. G. 1967. *The Elements of Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Bell, H. F. 1978. *Teaching and Learning Mathematics: in Secondary School*. Iowa: W.C. Brown Company.
- Depdiknas, 2008. *Kamus Besar Bahasa Indonesia: Pusat Bahasa (Edisi Keempat)*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Eggen, P. D., Kauchak, D. P., & Harder, R. J. 1979. *Strategies for Teachers: Information Processing Models in the Classroom*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Ernest, P. 1991. *The Philosophy of Mathematics Education*, London, Falmer Press.
- Ghee, T. T. & Heng, L. T. 2008. Efficacy of Multimedia Teaching Instruction in Elementary Mandarin Class. *Proceedings of CLaSIC 2008, Media in Foreign Language Teaching and Learning*.
- Hornby, A. S. 2010. *Oxford Advanced Learner's Dictionary of Current English (8th Edition)*. Oxford: Oxford University Press.
- Hudojo, H. 1990. *Strategi Mengajar Belajar Matematika*. Malang: Penerbit UM.
- _____. 2005. *Pengembangan Kurikulum Pembelajaran Matematika*. Malang: Penerbit UM.
- Johnson, D. A. & Rising, G. R. 1967. *Guidelines for Teaching Mathematics*. California: Wadsworth Publishing Company, Inc.

- Kardi, S. & Nur, M. 2000. *Pengajaran Langsung*. Surabaya: State University of Surabaya Press.
- Lipscomb, L., Swanson, J., & West, A. 2012. (<http://projects.coe.uga.edu/epltt/index.php?title=Scaffolding/>). Diakses pada 5 Februari 2012.
- Lipscom, L., Swanson, J., West, A. 2004. *Scaffolding eBook Learning, Teaching & Technology* Michael Orey, Editor. 1-15. (<http://www.coe.uga.edu/epltt/scaffolding.htm>). Diakses pada 20 Februari 2012.
- Mansyur, A. 2008. Pendekatan Hirarkis Belajar Matematika dan Pemecahan Masalah sebagai Upaya Mengatasi Kesulitan Belajar Mahasiswa pada Matakuliah Analisis Real I. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains* 3(2): 113–117.
- McLoughlin, C. 2004. Achieving Excellence in Teaching Through Scaffolding Learner Competence. In *Seeking Educational Excellence*. Proceedings of the 13th Annual Teaching Learning Forum, 9-10 Februari 2004. Perth: Murdoch University. (<http://Isn.curtin.edu.au/tlf2004/mcloughlin.html>). Diakses pada 20 Februari 2012.
- Muhammad Darwis, M. 1994. Hubungan Persepsi Mahasiswa terhadap Efektivitas Pengajaran Dosen, Siap terhadap Kalkulus, dan Penguasaan Logika Elementer dengan Kemampuan Pemahaman Konsep Kalkulus pada FMIPA IKIP Ujung Pandang. Tesis Tidak Diterbitkan. Surabaya: PPs IKIP Malang.
- Muhammad Darwis, M. 2007. Model Pembelajaran Matematika dengan Mempertimbangkan Kecerdasan Emosional. Disertasi Tidak Diterbitkan. Surabaya: PPs Universitas Negeri Surabaya.
- Mardiyanti, 2010. (<http://mardhiyanti.blogspot.com/2010/03/teori-hirarki-belajar-dari-robert-m.html>). Diakses pada 7 Maret 2012.
- McCarthy, J. & Light, J. 2001. Instructional Effectiveness of an Integrated Theater Arts Program for Children Using Augmentative and Alternative Communication and Their Nondisabled Peers: Preliminary Study. 0743-4618/01/1702-0088; Volume 17, June 2001; AAC Augmentative and Alternative Communication.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- Orton, A. 2004. *Learning Mathematics: Issues, Theory and Classroom Practice 3rd Edition*. London: MPG Books Ltd., Bodmin, Cornwall.
- Priyatni, E. T., Hamidah, S. C., Supeni M., A. S. & Triantoro, T. 2008. Peningkatan Kompetensi Menulis Paragraf dengan Teknik Scaffolding. *Jurnal Bahasa dan Seni* 36(2): 206 – 219.
- Ruseffendi, E. T. 1988. *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA (Cetakan Kedua)*. Bandung: Tarsito.
- Ruseffendi, E. T. 2006. *Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Shadiq, F. 2007.
http://www.google.co.id/#hl=id&gs_nf=1&cp=15&gs_id=3s&xhr=t&q=HIRarki+belajar&pf=p&sclient=psyab&oq=HIRarki+belajar&aq=0&aqi=g2&aql=&gs_l=&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.r_qf.,cf.osb&fp=3333fd826b58b9f6). Diakses pada 31 Januari 2012.
- Skemp, R. R. 1987. *The Psychology of Learning Mathematics*. Expanded American Edition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Slavin, R. E. 2006. *Educational Psychology: Theory and Practice (Eighth Edition)*. Boston: Pearson A and B.
- Soedjadi, R. 1985. *Mencari Strategi Pengelolaan Pendidikan Matematika Menyongsong Tinggal Landas Pembangunan Indonesia*. Pidato Pengukuhan Guru Besar. IKIP Surabaya.
- _____. 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*. Jakarta: Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Departemen Pendidikan Nasional.
- _____. 2007. *Masalah Kontekstual sebagai Batu Sendi Matematika Sekolah*. Surabaya: PSMS Universitas Negeri Surabaya.
- Sugiyono. 2008. *Metode Penelitian Pendidikan*. Bandung: Alfabeta.
- Suparno, P. 1997. *Filsafat Konstruktivis dalam Pendidikan*. Yogyakarta: Penerbit Kanisius.

Trianto. 2010. *Mendesain Model Pembelajaran Inovatif-Progresif: Konsep, Landasan, dan Implementasinya pada Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP)*. Jakarta: Kencana Prenada Media Group.

Vygotsky, L. 1978. *Mind and Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. 1976. The Role of Tutoring in Problem-Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 17/2: 89–100.

Zhao, R., & Orey, M. 1999. The scaffolding process: Concepts, features, and empirical studies. Unpublished manuscript. University of Georgia.

(<http://id.shvoong.com/social-sciences/education/2069530-pengertian-hierarki/>). Diakses pada 7 Maret 2012

(<http://ekagurunesama.blogspot.com/2010/07/kelebihan-model-pembelajaran-langsung.html>). Diakses 20 April 2012.

(<http://ekagurunesama.blogspot.com/2010/07/kekurangan-pembelajaran-langsung-direct.html>). Diakses 20 April 2012.